

ОБ ЭМПИРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В 5-6 КЛАССАХ

М.Н. Конопкина

It is not a new idea to refuse from axioms and theorems in Geometry. But, it fact, it is seldom met in practice. The realization of this idea is possible in the field of applied Geometry, by using the empirical method.

1. Введение

В последнее время в печати идет полемика о роли развивающей функции в геометрическом образовании, одними из важнейших составляющих которой являются, на наш взгляд, развитие логики и развитие интуиции (имеется в виду геометрическая интуиция). Неоспоримым является то, что геометрия, как, пожалуй, никакой другой предмет способствует развитию обоих качеств, «поскольку логический и интуитивный аспекты в этом предмете переплетаются» [4] очень тесно.

С другой стороны, противоречия между «сухой логикой» и «живым воображением» является одной из основных причин многих методических трудностей в вопросах геометрического образования [17], начиная с составления школьных программ и кончая оценением знаний учащихся. Существенным препятствием в деле геометрического образования является установившееся за многие годы положение курса геометрии в школе. Мы имеем в виду одно из главных противоречий современных геометрических курсов: первичностью пространственных представлений, формирующихся у человека, и традиционным для России подходом к построению систематического курса геометрии, который навязывает ход размышлений в неестественном направлении - от плоскости к пространству. И еще одно из важнейших препятствий состоит в том, что в школе геометрия изучается только с 7 класса и только в рамках систематического курса, при этом почти полностью отсутствует изучение наглядной геометрии. Прекрасно понимая, что данный подход является общепринятым, мы, тем не менее, не видим убедительных аргументов, объясняющих, почему

© 1999 М.Н. Конопкина

E-mail: konopkina@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

геометрия получила в школе именно такой статус. И основные трудности в изучении геометрии связаны, как нам кажется, именно с этим сложившимся положением в школе.

Излишнее увлечение аксиоматическим подходом в ущерб содержательным вопросам делает курс геометрии сухим, лишенным наглядности, немотивированным. А между тем само происхождение геометрии из потребностей практики позволяет сделать ее изложение более живым и понятным.

2. Современный школьный курс геометрии

В программах и учебниках по математике прошлых лет (а в некоторых учебниках и до сих пор), если говорить о геометрии, совершенно не учитываются ни умственное развитие ребенка, ни возрастные особенности. В последнее время об этом много говорят, но, к сожалению, очень мало что делается. Логика геометрической части программы по математике для 1-4 классов (начальная школа) прочитывается легко: подготовить ребят к сложному систематическому курсу геометрии. Но, остановившись на уровне знакомства с терминологией и примитивными построениями, программа не использует ни непосредственный интерес к геометрической деятельности в этом возрасте, ни богатый геометрический опыт детей, не ставит в качестве цели развитие их геометрической интуиции [13]. Те элементы геометрии, которые включены в программу младших классов, реального действия, к сожалению, не производят. И более того, проведенное одновременно с появлением элементов геометрии изменение содержания математических программ для младших школьников приводит к утрате ряда фактов, содействовавших развитию у школьников логического мышления, что отрицательно сказывается на процессе систематического курса геометрии.

Хорошо известно, какой огромный путь в своем интеллектуальном развитии проходит ребенок в первые 5 - 6 лет своей жизни. В богатом воображении его представлений об окружающем мире геометрические представления занимают одно из центральных мест. Геометрический опыт шестилетнего ребенка настолько многогранен, что если говорить о развитии наглядно-геометрических представлений, то изучение геометрии в школе немного может к нему добавить. Ребенок дошкольного возраста много знает, многое умеет делать руками. Ему доставляют огромное удовольствие занятия геометрическими играми, буквально все, что связано с геометрией. К таким играм можно отнести любые, которые используют такие виды геометрической деятельности, как рисование, конструирование, лепка, вырезание, склеивание, перегибание листков бумаги [15], и т.п. И, как считают психологи, именно на этот возраст приходится пик, если можно так сказать, «геометрической активности» [4].

К сожалению, при поступлении ребенка в школу его богатый геометрический опыт оказывается невостребованным; вместо того, чтобы быть воспринятым и направленным в учебное русло, он фактически прерывается. В течение первых лет обучения геометрия является редкой гостьей на страницах учебников и, к тому же, объем геометрических знаний, предлагаемый учащимся, рассчитан на детей, которые никогда не видели шар, не играли в кубики, не

рисовали с помощью линейки. «На кого, например, рассчитана программа, требующая, чтобы ученик по окончании начальной школы умел распознавать простейшие фигуры: квадрат и прямоугольник, круг и окружность, куб и шар? Ведь в школу приходит не Маугли, выросший среди дикой природы и в жизни не выдавший прямоугольника, а ребенок, который для игры в футбол никогда не брал куб, а детские домики не возводил из шаров. Возможно, кое-кто из ребят не знает названий некоторых геометрических фигур, хотя и прекрасно с ними знаком» [4]. Но мы, взрослые, забываем о том, что дети проходят первые классы школы в возрасте, когда развивается острота зрительных впечатлений и обостряется интерес к наблюдениям за предметами и явлениями окружающей жизни, а также о том, что детские впечатления особенно долго остаются в памяти.

Таким образом, к 12 - 13 годам, когда ученик приступает к изучению геометрии, «его непосредственный интерес к геометрии уже на излете» [4]. И возбудить интерес к предмету школьные учебники за 7 и другие классы не в состоянии: требования к систематическому изложению «накладывают свой отпечаток независимо от выбранного в учебнике подхода» [4] - более аксиоматического или более наглядного. Ученик, как только он открывает учебную книгу по геометрии, неизбежно ощущает разрыв между его личностным геометрическим опытом и тем, с чего начинается любое систематическое изложение геометрии. И это испытание разочарованием от первой встречи со школьной геометрией для многих определяет все дальнейшее отношение к предмету.

Так, социологические исследования в 7 - 11 классах показали, что «на вопрос анкеты «Какой из предметов тебе больше нравится: алгебра или геометрия?» геометрию выбрали от 0 до 25 процентов учащихся» [18].

3. Теоретизация геометрии

Что же больше всего отталкивает учеников от геометрии, отбивает у них интерес? Теоремы и их доказательства! Известный журналист Юрий Рост как-то писал: «Господи, каким только мусором не забивали нам голову учителя! Что, какая часть из того, чем мучили нас учителя и мучают теперь наших детей, сгодилась нам в жизни, для дела, для любви?» [11]. Изучение теорем – один из наиболее трудных с методической точки зрения вопросов преподавания математики. Дело в том, что обычная методика объяснения нового теоретического материала имеет существенные недостатки, связанные прежде всего с пассивностью обучаемых, деятельность которых часто сводится к слушанию учителя и переписыванию с доски. При этом учащиеся могут переписывать с доски, ничего не понимая, отвлекаться или заниматься посторонними делами [3]. Безусловно, нельзя сказать обо всех школьниках, что доказательство теорем снижает их уровень заинтересованности геометрией, но таких большинство.

Как решать эту – проблему каждый учитель представляет по-своему. И в своих исследованиях [4] мы представляем один из способов преподавания геометрии без доказательств, начиная ее изучение с 5 класса. Это курс «Введение в геометрию - 5». Основной тезис нашей работы таков: наряду с систематиче-

ским курсом геометрии, в 5–6-х классах педагогически целесообразно широкое содержательное изучение наглядной геометрии [8]. В его основе должна лежать максимально конкретная, практическая деятельность ребенка, связанная с различными геометрическими объектами. На наш взгляд, в курсе наглядной геометрии не должно содержаться теорем, строгих рассуждений, но должны присутствовать такие темы и задания, которые бы стимулировали учащегося к проведению несложных обоснований, к поиску тех или иных закономерностей. Теоретизация должна быть минимальной и несколько нарастать лишь на завершающем этапе. В нашей работе [4] приводятся некоторые конкретные рекомендации относительно тематики такого курса, при этом выделяются такие важные направления, как геометрическое конструирование, моделирование, дизайн.

Естественно возникают вопросы: на кого этот курс может быть рассчитан и кого может вырастить общеобразовательная школа, отказавшись от доказательств в геометрии, но закрепляя все теоремы практическим, эмпирическим путем? Это, так называемые, «технари». Прежде всего, инженеры различного профиля. А что необходимо инженеру из математики для нормальной продуктивной работы? Достаточно иметь под рукой калькулятор (или компьютер) и справочник для инженеров, в котором содержится необходимый набор тех или иных формул и теорем. Задача школы – научить будущих инженеров самым необходимым навыкам и умениям, использовать их при решении задач. Можно быть уверенным, что инженеру для решения какой-нибудь практической задачи не понадобится ни доказательство теорем Фалеса, Пифагора, ни каких других.

Уже сейчас во многих школах существует дифференцированный подход в преподавании математики. То есть для разных детей преподавание математики ведется в зависимости от необходимого им уровня сложности. В основном это математика для математиков (математические классы), математика для гуманитариев и математика для общеобразовательных классов. Конечно, в некоторых школах пошли дальше: создали экономические классы, технические, биологические и т.п. Но на самом деле, во всех этих классах идет обучение по одной программе, программе для общеобразовательных школ без всяких уклонов. Причем в гуманитарных классах это обучение чаще всего сводится к тому, что программа изменяется лишь за счет сокращения числа часов на изучение той или иной темы, абсолютно не заботясь о том, чтобы оно принесло реальную пользу людям, которым математика в жизни будет встречаться крайне редко.

4. Мнение психологов

В последнее время стало модным прислушиваться к мнениям психологов. И, что удивительно, их мнения о построении школьного курса геометрии в школе во многом схожи. Так, например, известный психолог Ж. Пиаже пишет [12], что, как выяснилось в ходе экспериментов, порядок развития идей ребенка в области геометрии кажется обратным порядку их исторического открытия. Научная геометрия начинается с системы Евклида (трактующей фигуры, углы и

т.д.), развивается в XVII столетии в так называемую проективную геометрию, имеющую дело с проблемами перспективы, и наконец в 19 столетии приходит к топологии (описывающей пространственные отношения в общем качественном виде, например, различие между открытыми и закрытыми структурами, внешним и внутренним, близостью и разделением). «Ребенок, - пишет Ж. Пиаже [11], начинает с последнего: его первые геометрические открытия являются топологическими. В возрасте 3 лет он легко различает открытые и замкнутые фигуры. Если вы попросите его срисовать квадрат или треугольник, он нарисует замкнутый круг; он рисует крест на крест двумя отдельными линиями. Если вы показываете ему рисунок большого круга с маленьким внутри, он может воспроизвести это отношение, но может так же нарисовать маленький круг вне большого, или соприкасающимся с ним. И все это может сделать прежде, чем сумеет нарисовать прямоугольник или выразить евклидовы характеристики (число сторон, углов и т.д.)». И это не может не настораживать, так как в школе придерживаются совершенно иного направления в обучении геометрии, от плоскости к пространству.

5. Исторический момент

В своих исследованиях [4] мы стараемся обращать внимание как раз на это, как нам кажется, одно из главных противоречий современных геометрических курсов: между первичностью пространственных представлений, формирующихся у человека, и традиционным для России подходом к построению систематического курса геометрии, который навязывает ход размышлений в неестественном направлении - от плоскости к пространству. Кроме того, основным направлением моей работы является попытка осуществить идею Ф. Клейна о слиянии в один курс планиметрии и стереометрии [7], [4], [9]. Давняя традиция разделения геометрии на эти два отдела не имеют под собой никакой научной почвы.

Вопрос о методике начальной геометрии далеко не нов. Споры по поводу преподавания геометрии имеют давность, измеряемую сотнями лет. Из всего разнообразия течений в этой области можно выделить два основных. Первое кладет в основу «Начала» Евклида, строя методику геометрии в подчинении основным целям «Начал» - дать логически стройную систему геометрических положений, исходящих из строго определенной группы аксиом, принимаемых без доказательства, - и большого числа положений - теорем, выводимых их аксиом логическим путем. Согласно этой цели, ученики идут по линии отвлеченного дедуктивного мышления, обращая особое внимание на точность определений и установление логической связи между теоремами. Такая система построения учебных курсов геометрии была господствующей в течение многих веков и дошла до нашего времени в форме модернизированных учебников Лежанжра, Адамара (в Англии даже самого Евклида), у нас - курсов геометрии Давидова, Киселева, Глаголева и др. В первоначальном своем виде «Начала» были созданы не педагогами и специально для взрослых людей с достаточно развитым логическим аппаратом [2]. Поэтому, применяя в более или менее чистом виде дедуктивный метод для построения школьного курса геометрии для

детей, сторонники его не учитывали психических особенностей «потребителя» – ребенка и, далее, подростка. В этом главная причина трудности преподавания детям геометрии обычного курса и причина мнения о недоступности геометрии вообще для детей младших классов и т.п.

С течением времени более глубокие сведения показали, что сами «Начала» Евклида не вполне достигают поставленной цели – быть логически стройной системой геометрических истин, выводимых из группы аксиом. Позднее ряд ученых с Гильбертом во главе ввели существенные изменения в «Начала». Но в новом переработанном виде логически выдержанная геометрическая система ввиду своей сложности уже выходит из рамок школьного курса.

Поэтому современный школьный курс геометрии строится как своеобразный компромисс между строго логической системой и интуицией.

6. Эмпирический подход

Применение в курсе эмпирического (индуктивно-опытного) подхода изучения материала может озадачить многих учителей, так как в своей практической работе в школе учителя при преподавании геометрии, как правило, этим методом не пользуются. В литературе же до последнего времени вопросы индуктивно-опытного подхода в процессе преподавания геометрии почти не освещены.

Однако, этот подход не просто фантазия, не имеющая под собой никакой реальной базы. Этим подходом в геометрии пользуются десятки сотен английских школ. Английская система геометрического образования складывалась, как и у нас в России, не один десяток лет. Но как поразительно они различны! Мне удалось познакомиться с основами математического курса образования средней английской школы (К-12), и надо сказать, что многое из опыта английских учителей может быть использовано в нашей школе.

Так, например, в этих стандартах образования по геометрии [10] ни в одном критерии, за исключением только одной фразы, нигде не говорится ни об аксиомах, ни о доказательствах теорем. А исключением является следующая фраза: «ученики должны понимать и применять теорему Пифагора». Даже не сказано, что они должны знать наизусть ее формулировку. Зато очень много внимания уделяется развитию пространственного воображения, геометрической интуиции, применению геометрии на практике, геометрическому моделированию и конструированию. И это, практически, при полном отсутствии аксиоматизации и доказательств, замененных логически стройным обоснованием и приведением массы упражнений, позволяющих учащимся убедиться в справедливости данного факта.

Известный английский геометр-тополог Оливер Хевисайд считал так: «Это возмутительно, что молодые люди должны забивать себе голову сплошными логическими тонкостями, пытаясь понять доказательство очевидного факта, или, может быть, не столь очевидного, и приобретая глубокую неприязнь к математике, в то время как изучение геометрии, важнейшего фундаментального предмета, может быть сделано очень интересным и поучительным. Я придерживаюсь мнения, что это, по существу, экспериментальная наука, как и всякая

другая, и ее надо преподавать в первую очередь с помощью наблюдения и эксперимента. Обучение должно быть естественным продолжением того знакомства с геометрией, которое получает каждый ребенок, соприкасаясь со своим окружением, но, конечно, обучение должно быть более определенным и целенаправленным» [1]. То есть, по мнению Хевисайда, мальчик, который убедится в справедливости геометрической теоремы с помощью измерения, постигнет теорему лучше, чем при чисто логическом обосновании без соответствующего опытного знания. «Поборники логики могут сказать, что таким путем вы ничего не доказываете. У меня другое мнение. Точно так же можно сказать, что вы ничего не доказываете в любых физических измерениях» [1]. Таким образом, геометрия без доказательств имеет право на существование.

7. Наглядная геометрия

История преподавания геометрии показывает, что большинство практикующих учителей считает возможным ввести обучение геометрии с 4 года обучения, то есть с 5 класса. И процесс воспитания и обучения в области пространственных представлений, естественно, должен принять форму наглядной геометрии. Наглядная геометрия, в отличие от систематического курса геометрии, изучает свойства геометрических форм путем «живого созерцания», то есть непосредственных восприятий и представлений конкретных примеров и их изображений. И хорошая постановка преподавания наглядной геометрии в младших классах является одним из условий для лучшего усвоения систематического курса геометрии при дальнейшем обучении. Поэтому следовало бы придать курсу наглядной геометрии большую систематичность и несколько расширить его материал. Время, отводимое на курс арифметики, вполне позволяет углубить изучение геометрических вопросов, что и делается в ряде школ.

При правильной постановке наглядная геометрия образует систему многочисленных и разнообразных демонстраций подвижных наглядных моделей отрезков, углов, треугольников и различных других фигур, систему упражнений в черчении и упражнений в конструировании геометрических моделей из разных материалов [5]. Все эти упражнения могут сопровождаться вычислениями, связанными с изучением свойств геометрических величин: сторон, периметров, углов и площадей.

Возникает вопрос, почему уделяется так много места и внимания геометрическим моделям при прохождении наглядной геометрии? Надо помнить, что главнейшая мощная творческая сила – это логика, создающая в старших классах школы геометрические понятия, – в сознании ученика младших классов еще не развита, она существует в виде слабых ростков. Но у нее есть другая сила, тоже творческая. Это – воображение. В наглядной геометрии логику заменяет интуиция, помогающая создавать представления. Ясно, что на пособия, создающие зрительные впечатления, превращающиеся потом в пространственные представления – геометрические образы, – должно быть обращено особое внимание. Очень многое зависит здесь от самой техники конструирования мо-

делей, умения их показать и умения подвести учащихся к необходимым геометрическим выводам.

Наконец, геометрия введет в преподавание арифметики пространственные образы, оживит ее работу, даст детям для вычислений новый пространственный материал в виде длин отрезков и площадей фигур, новые задачи, связанные со зрительными впечатлениями, которые дети так любят [14].

Следует отметить, что идея введения элементов наглядной геометрии в целях помощи при изучении смежным предметам: рисования, географии и др., особенно в целях подготовки к систематическому курсу геометрии, теперь не встречает яростного сопротивления.

Учителям, приступающим к преподаванию наглядной геометрии, возможно придется отрешиться от обычных приемов преподавания систематического курса геометрии, а также от обычных приемов преподавания, соответствующих 7 классу, с обязательным заучиванием определений, с задаванием на дом и «спрашиванием» уроков, с выставлением отметок и т.п. Все эти педагогические операции придут в свое время, но вначале дело должно идти иначе: демонстрации построения фигур, их свойств и объяснения учителя сменяются общей беседой о том, что было показано и что дети сумели (и верно ли) подметить. Беседы сменяются самостоятельными упражнениями учеников по изготовлению геометрических моделей из разных материалов и т.п. Задача учителя – дать детям большое количество систематизированных зрительных впечатлений, в которых дети должны разобраться и сделать свои выводы при помощи объяснений и наводящих вопросов учителя. Учащиеся не должны думать об отметках, стесняться задавать вопросы и делать замечания по поводу того, что они видят и делают. В такой непринужденной форме, а иногда игре, должна входить наглядная геометрия в 5 класс.

8. Заключение

Хорошая геометрическая подготовка учащихся имеет большое значение для повышения качества их общего и политехнического образования. Уровень этой подготовки в настоящее время нельзя считать нормальным при фактическом начале изучения геометрии в 7 классе одиннадцатилетней школы, то есть при потере целых пяти лет для нормального развития ребенка.

Подводя итог всему вышесказанному, повторим, что формировать умения и навыки мысленно выделять линии, фигуры, комбинировать их в различных сочетаниях, вращать их вокруг оси, накладывать одни на другие и т.д. необходимо еще до систематического курса геометрии. Если эти умения и навыки не сформированы у ребенка до начала обучения геометрии, то, как показывает опыт многих учителей, уроки геометрии представляют для него трудность, преодоление которой требует немалой дополнительной работы учителя. Формирование этих умений в 5 - 6-х классах с помощью эмпирического подхода ликвидировало бы возможность формального усвоения знаний по геометрии, а также создало бы предпосылки для развития пространственных представлений, геометрического воображения, умения читать чертежи [16], что совершенно

необходимо ученикам для дальнейшего обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б.М. *Оливер Хевисайд*. М.: Наука, 1985.
2. Григорьева И.С. *Взгляд на элементарную геометрию с точки зрения высшей школы* // Математика в школе. 1997. N 5.
3. Далингер В.А. *Самостоятельная деятельность учащихся – основа развивающего обучения* // Математика в школе. 1994. N 6. С.16-21.
4. Долбинин Н.Д., Шарыгин И.Ф. *О курсе наглядной геометрии в младших классах* // Математика в школе. 1990. N 6.
5. Зайкин М.И., Колосова В.А. *Провоцирующие задачи* // Математика в школе. 1997. N 6. С.32-36.
6. Конопкина М.Н. *Эмпирический подход в преподавании геометрии в 6-м классе: Дипломная работа*. Омск: ОмГУ, 1998.
7. Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей*. Т.2. Геометрия: Пер. с нем. Под ред. В.Г. Болтянского. 2-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 416 с.
8. Левитас Г.Г. *Введение в геометрию* // Математика в школе. 1990. N 6. С.21-23.
9. Левитас Г.Г. *Фузионизм в школьной геометрии* // Математика в школе. 1995. N 6.
10. *Основы математического курса образования средней английской школы (К-12)* <http://www.state.nh.us/doe/mathfull.htm>.
11. Пиаже Ж. *Избранные психологические труды*. М., 1969. С.121-126.
12. Пиаже Ж. *Как дети образуют математические понятия* // Хрестоматия по психологии. М.: Просвещение, 1977.
13. *Повышение эффективности обучения математики в школе: книга для учителя* / Сост. Глейзер Г.Д. М.: Просвещение, 1989.
14. Подходова Н.С. *Развитие пространственного мышления учащихся 5 – 6 классов* // Математика в школе. 1995. N 6.
15. Рощина Н.Л. *О воспитании эстетического вкуса учащихся 5 – 6 классов* // Математика в школе. 1997. N 2. С.4-7.
16. Фролова Т.Ф. *Роль наглядных представлений при изучении первых разделов планиметрии* // Математика в школе. 1989. N 1. С.39-45.
17. Щиряков А.Н. *Как развивать пространственное воображение учащихся* // Математика в школе. 1991. N 1. С.29-30.
18. Математика. *Приложение к газете «1 Сентября»*.