Математические
структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.15-33.

УДК 514.77

СУЩЕСТВОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ В СИНТЕТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Е.Б. Гринкевич

In this article the theorem which states the existences of models of pseudo-Remain spaces in the context of the Synthetic Differential Geometry (SDG) is proving.

Цель данной работы – показать существование моделей псевдоримановых пространств и преобразований, сохраняющих метрику в рамках синтетической дифференциальной геометрии (SDG), теории, развитой в работах А. Кока. Доказательство существования моделей основывается на существовании полного и точного функтора из категории гладких многообразий в категории, в которых реализуется SDG.

В последней части работы в качестве примера рассматривается пространство специальной теории относительности в SDG.

Синтетическая дифференциальная геометрия реализуется в категориях отличных от категории множеств. Под R мы будем понимать локальное кольцо в такой категории, удовлетворяющее аксиоме Кока-Ловера; под объектом D - подобъект инфинитезималов первого порядка в R, т.е. подобъект, определяемый формулой

$$D = \{x \in R|\ x^2 = 0\}.$$

Для произвольного объекта M пространство касательных векторов TM в SDG – это объект M^D, т.е. пространство отображений из объекта D в объект M. Как показано, в [1] в случае, когда M инфинитезимально линейно, каждый слой расслоения $\pi : M^D \to M$ является R-модулем, т.е. определены функции сложения $+ : TM \times_M TM \to TM$ и умножения на число $\cdot : R \times TM \to TM$.

E-mail: psemail@fbc.omsk.net.ru
Омский государственный университет

1. Понятие псевдориманова пространства в SDG

Определение псевдориманова пространства в рамках SDG можно найти в ряде работ (см. [3],[4]).

Мы дадим определение псевдориманового пространства, записав классическое определение на логическом языке категории. Возможность такого подхода обоснована в [1]. Такой подход позволит нам сравнить данное нами в SDG определение с классическим в категории гладких многообразий.

Хотелось бы отметить, что существует отличный подход к определению псевдоримановой метрики в SDG. В своей работе[3] А. Кок даёт определение метрики в рамках SDG, используя понятие инфинитезимальных 1- и 2- окрестностей диагонали и не используя понятие касательного вектора.

Введём следующее определение.

Определение 1. Пусть M – инфинитезимально линейный объект, тогда *псевдоримановой метрикой* на M будем называть отображение $g : TM \times_M TM \to R$ такое, что выполнены следующие условия:

1. $g(u,v) = g(v,u)$ - *симметричность*
2. $g(u_1 + u_2, v) = g(u_1, v) + g(u_2, v)$ - *линейность*
3. $g(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot g(u,v)$ - *аддитивность*
4. $\forall v \in TM \ g(u,v) = 0 \Rightarrow u = 0$ - *невырожденность*

Как мы видим, это классическое определение, данное на логическом языке категории.

Определим также понятие преобразования касательного пространства, сохраняющего псевдориманову метрику.

Дадим следующие определение.

Определение 2. Будем говорить, что преобразование касательного пространства

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

сохраняет псевдориманову метрику g, если выполнено следующее условие:

$$g(u,v) = g(h(u), h(v)).$$

2. Существование моделей

Доказательство существования моделей введённых выше определений основывается на свойствах хорошо адаптированных моделей SDG. Понятие хорошо адаптированной модели дано в книге А. Кока [1]. Эти модели реализуются в категориях $\mathcal{E}$, являющихся топосами Гротендика над категориями C^∞-колец. Базисными свойствами этих моделей является существование функтора из категории Mf гладких многообразий в топос $\mathcal{E}$, удовлетворяющего ряду аксиом стабильности. Наличие этих аксиом позволяет сравнивать свойства классических гладких многообразий со свойствами объектов топоса $\mathcal{E}$.

Пусть Mf обозначает категорию гладких многообразий и гладких отображений между ними, где под многообразием мы понимаем C^∞-гладкое, хаусдорфово многообразие со счётной базой.

Далее, $\mathcal{E}$ – декартово замкнутая категория, в которой существуют все конечные пределы диаграмм, являющаяся моделью SDG.

Обозначим через $i : Mf \to \mathcal{E}$ полный и точный функтор из категории гладких многообразий в категорию $\mathcal{E}$.

Приведём здесь некоторые утверждения, доказанные в [1],[4] и касающиеся свойств функтора i.

Предложение 1. *Объект R есть образ множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (с естественной структурой гладкого многообразия) под действием функтора i, т.е.*

$$R = i(\mathbb{R}).$$

■

Предложение 2. *Объект $InvR$ обратимых элементов в R есть образ множества обратимых (ненулевых) вещественных чисел под действием функтора i, т.е.*

$$InvR = i(Inv\mathbb{R}.$$

■

Предложение 3. *Функтор $i : Mf \to \mathcal{E}$ коммутирует с операцией образования касательного расслоения, т.е. существует изоморфизм*

$$i(TM) \xrightarrow{\cong} T(i(M)) \; (= i(M)^D),$$

где TM – классическое касательное расслоение гладкого многообразия M. ■

Предложение 4. *Для любого $M \in Mf$, $i(M)$ является инфинитезимально линейным пространством и отображения*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \times TM \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[dr] & & TM \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} TM \times_M TM \arrow[rr, "+"] \arrow[dr] & & TM \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

переводятся с помощью i в структуру векторного пространства касательного расслоения, полученную канонически из инфинитезимальной линейности $i(M)$. ■

Доказательство существования моделей для определений 1, 2 будет основано на том, что функтор i сохраняет структуру псевдоримановой метрики для объектов вида $i(M)$, где M – гладкое псевдориманово многообразие в Mf.

Рассмотрим гладкое многообразие M с гладкой псевдоримановой метрикой g. В силу определения, g удовлетворяет условиям симметричности, аддитивности, однородности и невырожденности.

2.1. Симметричность, аддитивность и однородность

Условия симметричности, аддитивности и однородности можно записать в Mf с помощью коммутативности следующих диаграмм:

Симметричность

$$\begin{tikzcd} TM \times_M TM \arrow[rr, "twist"] \arrow[dr, "g"'] & & TM \times_M TM \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

где $twist(u, v) = (v, u)$.

Аддитивность

$$\begin{tikzcd} TM \times_M TM \times_M TM \arrow[r, "< + \circ \pi_{12}, \pi_3 >"] \arrow[d, "< g \circ \pi_{12}, g \circ \pi_{23} >"'] & TM \times_M TM \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

где $\pi_{i,j}$ - проекции на соответствующие координаты.

Однородность

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times TM \times_M TM & \xrightarrow{<\pi_1, g \circ \pi_{23}>} & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle <\alpha \cdot \circ \pi_{12}, \pi_3>} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \times} \\ TM \times_M TM & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

По определению функтор сохраняет коммутативность диаграмм.

Учитывая то, что функтор i сохраняет векторную структуру, а также то, что метрика g гладкое отображение, т.е. является стрелкой категории Mf, мы можем утверждать, что верно следующее

Предложение 5. *Образ метрики g под действием функтора i*

$$i(g) : Ti(M) \times_{i(M)} Ti(M) \to R$$

удовлетворяет условиям симметричности, аддитивности и однородности метрики g из определения 1. ■

2.2. Невырожденность

Запишем ещё раз условие невырожденности метрики:

$$\forall v \in TM \; g(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Записать это условие в виде коммутативности соответствующей диаграммы сложно, так как в записи этой формулы используется функтор $\forall$.

Эквивалентное утверждение о невырожденности метрики состоит в том, что определитель матрицы $g_x = \{g_{ij}\}$ скалярных произведений базисных векторов в каждой точке x многообразия M не равен нулю. Известно, что определитель $det\ g_x$ скаляр, т.е. не зависит от выбора координат.

Таким образом, на M определена скалярная функция $det\ g : M \to \mathbb{R}$, ставящая в соответствие каждой точке x многообразия M значение определителя $det\ g_x$ в этой точке.

Рассматриваемая нами метрика $g \in C^\infty$, т.е. все функции $g_{ij} \in C^\infty$. Тогда функция $det\ g$ также гладкая, так она является по определению конечной суммой произведений гладких функций g_{ij}. Таким образом, $det\ g$ – стрелка категории Mf.

В силу невырожденности метрики определитель не равен нулю, а следовательно обратим. Таким образом, функция $det\ g$ пропускается через подмножество обратимых вещественных чисел в категории Mf, т.е. коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "det\ g"] \arrow[dr] & & R \\ & Inv\mathbb{R} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Каждый из объектов этой диаграммы сохраняется под действием функтора i.

Очевидно, что выполняется равенство $i(det\ g) = det\ i(g)$, так как определитель есть композиция операций умножения и сложения вещественных чисел, а эти операции сохраняются под действием функтора i [1]. Таким образом, мы получаем

Предложение 6. *Образ метрики g под действием функтора i*

$$i(g) : Ti(M) \times_{i(M)} Ti(M) \to R$$

удовлетворяет условию невырожденности Определения 1. ■

Основываясь на Предложениях, доказанных выше, можем утверждать, что верна следующая

Теорема 1. *В хорошо адаптированных моделях синтетической дифференциальной геометрии существуют объекты вида $i(M)$, где M – гладкое псевдоримановое многообразие, с определённой на них псевдоримановой метрикой вида $i(g)$, удовлетворяющей Определению 1.* ■

2.3. Преобразования, сохраняющие метрику

Утверждение о том, что преобразование $h : TM \to TM$ сохраняет метрику, эквивалентно коммутативности следующих диаграмм:

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} TM \times_M TM \arrow[rr, "h \times h"] \arrow[dr, "g"'] & & TMTM \times_M TM \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Сами преобразования очевидно гладкие функции, так как над каждой точкой являются линейными преобразованиями.

Функтор i сохраняет коммутативность этих диаграмм, а следовательно, мы получаем

Предложение 3. *Образ преобразования h, сохраняющего метрику в Mf под действием функтора i*

$$i(h) : Ti(M) \to Ti(M)$$

сохраняет метрику $i(g)$. ∎

2.4. Пространство СТО в SDG

Рассмотрим классическое пространство специальной теории относительности $\mathbb{R}^4_1$ с метрикой g, определённой следующей формулой:

$$g(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i.$$

Очевидно, что определённая таким образом метрика $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ – гладкое отображение, и, как следует из Теоремы 1, она сохранится под действием функтора i.

Как следует из [1], $i(\mathbb{R}^4) = R^4$. В силу того, что в координатах метрика g записывается как композиция арифметических операций вещественных чисел, сохраняемых под действием функтора i, $i(g)$ сохранит свой внешний вид, а следовательно, и сигнатуру. Таким образом, мы получаем пространство R^4 с введённой на нём псевдоримановой метрикой типа (1,3). Таким образом, мы можем говорить, что в SDG определено пространство специальной теории относительности (пространство Минковского $R^4_{1,3}$). Будем обозначать метрику той же буквой g.

Рассмотрим некоторые свойства, которыми обладает это пространство.

Квадрат длины вектора ξ в пространстве $R^4_{1,3}$ задаётся формулой

$$|\xi|^2 = g(\xi, \xi) = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2.$$

Как и в классической теории, будем называть *световым* конус, образованный векторами ξ, для которых $|\xi|^2 = 0$, а сами эти вектора будем называть *изотропными*, или *световыми*. Вектора, лежащие внутри конуса и имеющие положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, будем называть *времениподобными* векторами. Вектора, лежащие вне конуса и имеющие отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2 < 0$, будем называть *пространственноподобными* векторами.

В отличие от классики, в нашем пространстве возникают вектора ξ, такие, что их квадрат длины одновременно больше либо равен, и меньше либо равен нуля, $0 \le |\xi|^2 \le 0$, назовём эти вектора *близкие к световым*.

Также мы можем рассмотреть мировую линию какой-нибудь материальной частицы. Эта мировая линия будет иметь вид

$$x^0 = ct, x^1 = x^1(t), x^2 = x^2(t), x^3 = x^3(t),$$

где c – постоянная скорость света в пустоте.

Вектор $|\xi|$, касательный к мировой линии, будет иметь вид

$$\xi = (c, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3).$$

Обозначим через $v = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ вектор скорости пространственного движения. Постулат специальной теории относительности о том, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью, большей скорости света c, будет иметь вид $|v| \leq c$ или

$$c^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2 \geq 0.$$

Таким образом, мы видим, что вектор скорости материальной частицы может быть времениподобным, изотропным или близким к световому.

Предположим, что вектор ξ близкий к световому. Тогда получим, что для него вектор скорости v отличается на инфинитезимальный объект d, т.е.

$$c^2 - v^2 = d,$$

где $0 \leq d \leq 0$. Отсюда следует, что вектор скорости близкого к световому вектора ξ равен

$$v = c \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{c^2}}.$$

Корень из $1 + \frac{d}{c^2}$ определён, так как единица плюс инфинитезимал - обратимое число[1]. Далее заметим, что внешний вид преобразований Лоренца в пространстве R_1^4 не изменится,так как вывод формы этих преобразований основывается на тех свойствах метрики g, которые не изменились при переходе в категорию $\mathcal{E}$.

Литература

1. Kock A. *Synthetic Differential Geometry* / Cambridge University Press, 1981.

2. Kock A. *Combinatorics of curvature, and Bianchi Identity* // Theory and Applications of Categories 2. 1996. N 7. P.69-89.

3. Kock A. *Geometric Construction of the Levi - Civita Parallelism* // Theory and Applications of Categories 4. 1998. N 9. P.195-207.

4. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis* / Springer Verlag, 1991.