Математические
структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.23-33.

УДК 519.8

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОДНОГО КЛАССА ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОЦЕССОВ ОТСЕЧЕНИЯ

А.Л. Евстифеева

In this paper, we pose and discuss a number of questions about the cutting planes algorithm for trying to solve integer programming problems.

1. Введение

Пусть R^n - n-мерное вещественное пространство, Z^n - множество его целочисленных точек (векторов). Задача целочисленного программирования (ЦП) может быть сформулирована следующим образом:

$$f(x) \longrightarrow \max, \tag{1.1}$$

$$x \in M \subset R^n, \tag{1.2}$$

$$x \in Z^n, \tag{1.3}$$

то есть нужно найти $\bar{x}$, максимизирующий $f(x)$, при условии, что $\bar{x}$ целочисленный.

Сложность решения задач ЦП существенно определяется свойствами целевой функции (1.1) и допустимой области (1.2)-(1.3). Наиболее изученными являются задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП), у которых функция (1.1) линейна, а M задается конечной системой линейных уравнений и неравенств.

Нас интересует задача ЦП в лексикографической постановке. Отношение лексикографического порядка введем с помощью функции :

$\eta(x,y) = \min\Big\{ i \mid x_i \neq y_i, i = 1,\ldots,n \Big\}$, $x, y \in R^n$, $x \neq y$ - номер первой координаты различия точек x и y.

E-mail: siman@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Определение . Вектор x лексикографически больше (меньше) вектора y, $x \succ y$ ($x \prec y$), если $x \neq y$ и $x_\omega > y_\omega$ ($x_\omega < y_\omega$) для $\omega = \eta(x, y)$.

Без ограничения общности, задачу ЦП в лексикографической постановке определим как задачу поиска:

$$z^* = \mathrm{lexmax}(\Omega \cap Z^n), \Omega \subset R^n. \qquad (1.4)$$

Существующие подходы к решению задач ЦП достаточно разнообразны. К ним относятся метод отсечения, метод ветвей и границ, динамическое программирование и др. Принцип метода отсечения заключается в том, что допустимая область дискретной задачи погружается в некоторое выпуклое множество, которое последовательно «обрезается» с помощью вводимых линейных ограничений (отсечений) до получения непрерывной задачи с необходимыми свойствами.

Методы отсечения различаются между собой выбором релаксационного множества и способом построения ограничений [8]. В данной работе будут рассматриваться линейные отсечения, которые строятся на основе L-разбиений пространства R^n.

2. Регулярные отсечения и алгоритмы

Будем предполагать, что существует $\bar{x} = \mathrm{lexmax}(\Omega), \bar{x} \notin Z^n$.

Определение . Линейное неравенство $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ называется *отсечением* (для задачи (1.4)), если $(\gamma, \bar{x}) > \gamma_0$ и $(\gamma, z) \leq \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^n$.

Замечание . Линейное неравенство $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ определяется своими коэффициентами $\gamma_i, i = 1, \ldots, n, \gamma_0,$, поэтому будем ассоциировать его с вектором $\bar{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \subseteq R^{n+1}$.

Через A обозначим процесс отсечения (без отбрасывания неравенств) для решения задачи (1.4), использующий на каждом шаге конечную совокупность отсечений G. Подробнее этот процесс выглядит так :

Шаг 0. Полагаем $\Omega^1 = \Omega$.

k-я итерация.

Шаг 1. Находим $x^k = \mathrm{lexmax}\Omega^k$. Если $x^k \in Z^n$ или $\Omega^k = \emptyset$, то процесс завершается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1.4), во втором - решения нет.

Шаг 2. Выбираем конечную совокупность неравенств G_{x^k}. Полагаем $\Omega^{k+1} = \Omega^k \cap \left\{ x \in R^n \mid (\gamma, x) \leq \gamma_0 \text{ для всех } \bar{\gamma} \in G_{x^k} \right\}$. Увеличиваем k на 1 и переходим к $(k+1)$-й итерации (на шаг 1).

Будем говорить, что процесс A *решает задачу* (1.4), если он за конечное число итераций либо находит z^*, либо устанавливает отсутствие допустимых решений.

Определение . Точки $x, y \in R^n$ будем называть *L-эквивалентными*, если не существует такой $z \in Z^n$, что либо $x \preceq z \preceq y$, либо $x \succeq z \succeq y$.

L-эквивалентность является отношением эквивалентности. Порождаемое им фактор - пространство R^n/L называется L-разбиением пространства R^n, а его элементы - L-классами. L-разбиение пространства естественным образом индуцирует L-разбиение произвольного множества $S \subset R^n$, которое обозначим S/L.

Отметим некоторые *свойства* L-разбиения[2]:

1) Всякая целочисленная точка образует отдельный L-класс; остальные L-классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*.

2) Если $V \in R^n/L$ - дробный L-класс, то существуют такие $r \in \{1, \dots, n\}$ и $a_j \in Z, j = 1, \dots, r$, что

$$V = \Big\{x \in R^n | x_j = a_j, j = 1, \dots, r-1, a_r < x_r < a_r + 1\Big\}.$$

3) Если $S \subset R^n$ ограничено, то S/L - конечно.

4) L-разбиение согласовано с лексикографическим порядком в том смысле, что если $V_1, V_2 \in R^n/L$ и $x^1 \succ y^1$ для некоторых $x^1 \in V_1, y^1 \in V_2$, то $x \succ y$ для всех $x \in V_1, y \in V_2$.

Особый интерес в задаче (1.4) представляет множество:

$$\Omega_* = \Big\{x \in \Omega | x \succ z, \forall z \in \Omega \cap Z^n\Big\},$$

называемое *дробным накрытием* задачи (1.4). Оно в некотором смысле характеризует «расстояние» между непрерывным и целочисленным оптимумами задачи (1.4). Фактор-множество Ω_*/L будем называть *L-накрытием* задачи (1.4).

Определение . Отсечение $\bar{\gamma}$ называется *регулярным*, если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}(\Omega)}$, где $V_{\bar{x}}(\Omega)$ - L-класс множества Ω, содержащий точку $\bar{x}$.

Двойственные дробные процессы отсечения (см. [3]), использующие на каждой итерации регулярные отсечения, называются *регулярными*.

Свойства L-разбиений позволяют получать в терминах L-классов оценки числа итераций регулярных процессов. Для этого введем определение.

Определение . *Глубиной* $H(\bar{\gamma}, \Omega)$ отсечения $\bar{\gamma}$ (относительно задачи (1.4)) называется количество полностью исключаемых им элементов L-накрытия.

Теорема 2.1. *[4] Пусть для всех отсечений $\bar{\gamma}$ регулярного процесса выполняется неравенство $H(\bar{\gamma}, \Omega^t) \le h$, где Ω^t - множество, полученное на t-й итерации. Тогда число итераций этого процесса заключено между числами $\frac{1}{h}|\Omega_*/L|$ и $|\Omega_*/L|$.* ■

Отметим, что приведенное выше свойство L-разбиения под номером 3) обеспечивает конечность регулярных процессов при ограниченном Ω_*. Нужно сказать, что получение нетривиальной верхней оценки для глубин отсечений является достаточно трудной задачей. Одним из классов отсечений, для которых такая оценка построена, является класс P-отсечений [3], содержащий в себе вполне регулярные отсечения .

P-отсечения определяются следующим образом . Пусть задан параллелепипед

$$P = \Big\{x \in R^n | a_j \le x_j \le b_j, j = 1, \dots, n\Big\},$$

где $a_j, b_j \in R$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим класс задач (1.4), удовлетворяющих условиям : $\Omega \subset P$, $\bar{x} = \mathrm{lexmax}\Omega$, $\bar{x} \notin Z^n$.

Определение . Регулярное отсечение $\bar{\gamma}$ называется *P-отсечением*, если $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для всех таких $z \in P \cap Z^n$, что $z \prec \bar{x}$. Соответствующие процессы отсечения называются *P-процессами* .

Теорема 2.2. *[3] Пусть $\Omega \subset P$, $\bar{\gamma}$ - P-отсечение .Тогда $H(\bar{\gamma}, \Omega^t) \le n$.* ∎

Определение . P-отсечение $\bar{\gamma}$ называется *вполне регулярным отсечением* (относительно точки $\bar{x}$ и параллелепипеда P), если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V_{\bar{x}}(P)$, где $V_{\bar{x}}(P)$ - L-класс параллелепипеда P, содержащий точку $\bar{x}$. Соответствующие процессы отсечения назовем *вполне регулярными.* Класс вполне регулярных отсечений будем обозначать через $\Im(\bar{x}, P)$.

Условие, сформулированное в данном определении, обеспечивает определенную «силу» вполне регулярных отсечений, ибо точка $\bar{x}$ должна отсекаться вместе с некоторым непустым множеством $V_{\bar{x}}(P)$. В то же время, условие сохранения точек $z \in P \cap Z^n$, $z \prec \bar{x}$, напротив, делает отсечения класса $\Im(\bar{x}, P)$ «осторожными». На сегодня отсутствует конструктивное описание класса P-отсечений. Для класса $\Im(\bar{x}, P)$ такое описание получено в [6].

3. Сравнение вполне регулярных отсечений

Введем следующие обозначения :

$\varphi(x) = \min\Big\{i | x_i \ne \lfloor x_i \rfloor, i = 1, \dots, n\Big\}$, для $x \notin Z^n$, - номер первой дробной координаты точки x;

для $x \in P \backslash Z^n$ положим

$J_-(x, P) = \Big\{j | x_j = a_j, 1 \le j \le \varphi(x) - 1\Big\}$,

$J_0(x, P) = \Big\{j | a_j < x_j < b_j, 1 \le j \le \varphi(x) - 1\Big\}$,

$J_+(x, P) = \Big\{j | x_j = b_j, 1 \le j \le \varphi(x) - 1\Big\}$,

$J_\tau^k(x, P) = \Big\{j \in J_\tau(x, P) | j > k\Big\}$,

$\bar{J}_\tau^k(x, P) = \Big\{j \in J_\tau(x, P) | j < k\Big\}$, где $\tau \in \Big\{-, 0, +\Big\}$.

Пусть $\Omega \subset P$, и существует $\bar{x} = \mathrm{lexmax}\Omega$, $\bar{x} \notin Z^n$.

Теорема 3.1. *[6] Отсечение $(\gamma, x) \leq \gamma_0$ является вполне регулярным (относительно точки $\bar{x}$ и параллелепипеда P) тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям :*

1) $\gamma_{\varphi(\bar{x})} > 0$;

2) $\gamma_k = 0$ *для всех* $k > \varphi(x)$;

3)

$$\gamma_k \geq \sum_{j \in J_0^k(\bar{x},P)} \gamma_j(b_j - \bar{x}_j) + \sum_{j \in J_-^k(\bar{x},P), \gamma_j > 0} \gamma_j(b_j - \bar{x}_j) + \gamma_{\varphi(\bar{x})}\Big(b_{\varphi(\bar{x})} - \lfloor \bar{x}_{\varphi(\bar{x})} \rfloor\Big),$$

для всех $k \in J_0(\bar{x}, P) \cup J_+(\bar{x}, P)$;

4) $\gamma_0 = (\gamma, \lfloor \bar{x} \rfloor)$, *где* $\lfloor \bar{x} \rfloor = (\lfloor \bar{x}_1 \rfloor, \ldots, \lfloor \bar{x}_n \rfloor)$. ■

Пусть $\bar{\gamma}$ - отсечение вида $(\gamma, x) \leq \gamma_0$. Положим

$Q_p(\bar{\gamma}) = \Big\{x \in P | (\gamma, x) \leq \gamma_0\Big\}$ - множество точек параллелепипеда P, сохраняемых отсечением $\bar{\gamma}$.

Определение . Будем говорить, что отсечение $\bar{\gamma}'$ не сильнее отсечения $\bar{\gamma}$, если $Q_p(\bar{\gamma}) \subseteq Q_p(\bar{\gamma}')$.

Из теоремы 3.1 следует, что для всякого вполне регулярного отсечения выбор коэффициентов γ_k при $k \in J_-(\bar{x}, P)$ произволен. Выделим в $\Im(\bar{x}, P)$ подкласс

$$U(\bar{x}, P) = \Big\{\bar{\gamma} \in \Im(\bar{x}, P) | \gamma_k \geq 0, k \in J_-(\bar{x}, P)\Big\}.$$

Лемма 3.1. *[7] Для всякого $\bar{\gamma} \in \Im(\bar{x}, P)$ существует такое $\bar{\gamma}' \in U(\bar{x}, P)$, что $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}'$.* ■

Определение . Отсечения $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}' \in U(\bar{x}, P)$ назовем ξ-эквивалентными, если $\gamma_k = \gamma'_k$, при $k \in J_-(\bar{x}, P) \cup J_0(\bar{x}, P)$.

Это отношение является отношением эквивалентности и, следовательно, порождает фактор-множество $U(\bar{x}, P)/\xi$. В каждом классе эквивалентности выделим по одному представителю $\bar{\gamma}^*$,определенному условием

$$\bar{\gamma}_k^* = \sum_{j \in J_0^k \cup J_-^k} \bar{\gamma}_j^*(b_j - \bar{x}_j) + \bar{\gamma}_{\varphi(\bar{x})}^*(b_{\varphi(\bar{x})} - \lfloor \bar{x}_{\varphi(\bar{x})} \rfloor), \text{ при } k \in J_+. \tag{3.1}$$

Легко доказать, что любое отсечение из элемента фактор-множества $U(\bar{x}, P)/\xi$ не сильнее соответствующего отсечения $\bar{\gamma}^*$. Объединим эти «самые сильные» отсечения в самостоятельный подкласс, который обозначим через $U^*(\bar{x}, P)$. Отметим для ясности, что $\bar{\gamma} \in U^*(\bar{x}, P)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\gamma} \in U(\bar{x}, P)$ и удовлетворяет условию (3.1). Очевидна следующая теорема

Теорема 3.2. *[7] Для любого $\bar{\gamma} \in \Im(\bar{x}, P)$ существует такое $\bar{\gamma}' \in U^*(\bar{x}, P)$, что $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}'$.* ■

4. Сравнение вполне регулярных процессов, основанных на отсечениях классов $U(\bar{x}, P)$ и $U^*(\bar{x}, P)$

Пусть $\Gamma(\tilde{x}, P)$ - отсечения $(\gamma, x - \lfloor \tilde{x} \rfloor) \le 0$, коэффициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

1. $\gamma_k = 0$ при $k \in J_-(\tilde{x}, P)$;

2.
$$\gamma_k = \sum_{j \in J_0^k(\tilde{x}, P)} \gamma_j (b_j - \tilde{x}_j) + \gamma_{\varphi(\tilde{x})} \Big(b_{\varphi(\tilde{x})} - \lfloor \tilde{x}_{\varphi(\tilde{x})} \rfloor \Big), \text{ для всех } k \in J_0(\tilde{x}, P);$$

3.
$$\gamma_k \ge \sum_{j \in J_0^k(\tilde{x}, P)} \gamma_j (b_j - \tilde{x}_j) + \gamma_{\varphi(\tilde{x})} \Big(b_{\varphi(\tilde{x})} - \lfloor \tilde{x}_{\varphi(\tilde{x})} \rfloor \Big), \text{ для всех } k \in J_0(\tilde{x}, P).$$

Пусть вполне регулярный процесс A (для решения задачи (1.4)) использует на каждом i-ом шаге некоторое отсечение из совокупности вполне регулярных отсечений $\Gamma(x^i, P)$ класса $U(\bar{x}, P)/\xi$, где $x^i = \mathrm{lexmax}\Omega^i$.

Через A^* обозначим вполне регулярный процесс, использующий на каждом шаге отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ из класса $U^*(\bar{x}, P)$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

1. $\gamma_k^* = 0$ при $k \in J_-(x^i, P)$;

2.
$$\gamma_k^* = \sum_{j \in J_0^k(x^i, P)} \gamma_j^* (b_j - x_j^i) + \gamma_{\varphi(x^i)} \Big(b_{\varphi(x^i)} - \Big\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \Big\rfloor \Big), \text{ для всех } k \in J_0(x^i, P);$$

3.
$$\gamma_k^* = \sum_{j \in J_0^k(x^i, P)} \gamma_j^* (b_j - x_j^i) + \gamma_{\varphi(x^i)} \Big(b_{\varphi(x^i)} - \Big\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \Big\rfloor \Big), \text{ для всех } k \in J_+(x^i, P).$$

Ясно, что отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ отличается от (3.1) наличием условия 2. Выясним, как выглядят коэффициенты отсечения $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$.

Пусть класс $J_0(x^i, P)$ содержит p индексов, т.е. $J_0(x^i, P) = \{j_1, \ldots, j_p\}$. Тогда, полагая $\gamma^*_{\varphi(x^i)} = 1$, из 2. получим

$$\gamma^*_{j_p} = b_{\varphi(x^i)} - \Big\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \Big\rfloor ;$$

$$\gamma^*_{j_{p-1}} = \gamma^*_{j_p}(b_{j_p} - x^i_{j_p}) + b_{\varphi(x^i)} - \Big\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \Big\rfloor = \Big(b_{\varphi(x^i)} - \Big\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \Big\rfloor \Big)(b_{j_p} - x^i_{j_p} + 1);$$

$$\gamma^*_{j_{p-2}} = \gamma^*_{j_{p-1}}(b_{j_{p-1}} - x^i_{j_{p-1}}) + \gamma^*_{j_p}(b_{j_p} - x^i_{j_p}) + b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor =$$

$$= \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right)\left((b_{j_p} - x^i_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - x^i_{j_{p-1}}) + b_{j_p} - x^i_{j_p} + 1\right) =$$

$$= \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right)(b_{j_p} - x^i_{j_p} + 1)(b_{j_{p-1}} - x^i_{j_{p-1}} + 1) =$$

$$= \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right) \prod_{l \in J_0^{j_{p-2}}} (b_l - x^i_l + 1).$$

Продолжая аналогичные выкладки для каждого $\gamma_{j_{p-i}}$, $i = 3, \ldots, p-1$, получим, что в общем случае при $k \in J_0(x^i, P)$;

$$\gamma^*_k = \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x^i_l + 1). \tag{4.1}$$

Рассмотрим условие 3: Пусть $k \in J_+(x^i, P)$. Если $k > j_p$, то

$$\gamma^*_k = b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor;$$

если $j_{p-1} < k < j_p$, то

$$\gamma^*_k = \gamma^*_{j_p}(b_{j_p} - x^i_{j_p}) + b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor = \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right)(b_{j_p} - x^i_{j_p} + 1);$$

В общем случае если $j_{i-1} < k < j_i$, $i = 2, \ldots, p-1$, то

$$\gamma^*_k = \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x^i_l + 1). \tag{4.2}$$

Теперь можно сказать, что вполне регулярный процесс A^* использует отсечение $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$ из класса $U^*(\bar{x}, P)$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

1. $\gamma^*_k = 0$ при $k \in J_-(x^i, P)$;

2. $$\gamma^*_k = \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x^i_l + 1) \text{ при } k \in J_0(x^i, P);$$

3. $$\gamma^*_k = \left(b_{\varphi(x^i)} - \left\lfloor x^i_{\varphi(x^i)} \right\rfloor\right) \prod_{l \in J_0^k} (b_l - x^i_l + 1) \text{ при } k \in J_+(x^i, P).$$

Очевидно следующее предложение.

Предложение 4.1. *Любое отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(x^i, P)$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(x^i, P)$.* ■

Ранее в работах [1, 5] были найдены наискорейшие по числу итераций вполне регулярные алгоритмы для задач булева программирования, а также в работе [7] были найдены наискорейшие вполне регулярные алгоритмы для решения задачи (1.4), использующие на каждой итерации некоторую конечную вполне регулярную совокупность неравенств. В данной же работе рассматриваются алгоритмы, использующие на каждой итерации лишь по одному отсечению из $\Gamma(\tilde{x}, P)$, и доказывается, что из всех таких алгоритмов наискорейшим по числу итераций является алгоритм, основанный на отсечении $\bar{\gamma}^*$. Для этого воспользуемся леммой.

Лемма 4.1. *Пусть u, v не являются L-эквивалентными и $u \prec v$. Если $\bar{\gamma}^*(v, P)$ отсекает точку u, то $\bar{\gamma}^*(v, P)$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(u, P)$.*

Доказательство. Так как точка u отсекается $\bar{\gamma}^*(v, P)$, то $\eta(u, v) < \varphi(v)$. Действительно, если $\eta(u, v) > \varphi(v)$, то точки u и v L-эквивалентны, а если $\eta(u, v) = \varphi(v)$, то $u_{\varphi(v)} \leq \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor$, а это значит, что

$$(\gamma^*(v, P), u) - \gamma_0^*(v, P) = \sum_{i \in J_0(v,P)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \sum_{i \in J_+(v,P)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\varphi(v)}^* \Big(u_{\varphi(v)} -$$

$$- \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \Big) \leq 0,$$ т. е. точка u сохраняется отсечением $\bar{\gamma}^*(v, P)$.

Очевидно, что $\eta(u, v) \notin J_-(v, P)$.

Пусть $\eta(u, v) \in J_0(v, P) \cup J_+(v, P)$ и $u_{\eta(u,v)} - v_{\eta(u,v)} \leq -1$. Тогда, используя формулы (4.1),(4.2), получаем

$$(\gamma^*(v, P), u) - \gamma_0^*(v, P) = \sum_{i \in \bar{J}_0^{\eta(u,v)}(v,P) \cup \bar{J}_+^{\eta(u,v)}} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\eta(u,v)}^*(u_{\eta(u,v)} - v_{\eta(u,v)}) +$$

$$+ \sum_{i \in J_0^{\eta(u,v)} \cup J_+^{\eta(u,v)}, i < \varphi(v)} \gamma_i^*(u_i - v_i) + \gamma_{\varphi(v)}^*(u_{\varphi(v)} - v_{\varphi(v)}) = \Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\eta(u,v)}} (b_l -$$

$$- v_l + 1)(u_{\eta(u,v)} - v_{\eta(u,v)}) + \Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \sum_{i \in J_0^{\eta(u,v)} \cup J_+^{\eta(u,v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(u_i - v_i) +$$

$$+ u_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor \leq \Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\eta(u,v)}} (b_l - v_l + 1)(-1) + \Big(b_{\varphi(v)} - - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \times$$

$$\times \sum_{i \in J_0^{\eta(u,v)} \cup J_+^{\eta(u,v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(b_i - v_i) + b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \Big(b_{\varphi(v)} - - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{i \in J_0^{\eta(u,v)} \cup J_+^{\eta(u,v)}, i < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^i} (b_l - v_l + 1)(b_i - v_i) + 1 - \prod_{l \in J_0^{\eta(u,v)}} (b_l - v_l + 1) \Big) = 0.$$

Равенство нулю имеет место в силу следующих выкладок.

Пусть $J_{)}^{\eta(u,v)} = \{j_1, \ldots, j_p\}$. Тогда

$$\sum_{i\in J_0^{\eta(u,v)}\cup J_+^{\eta(u,v)}, i<\varphi(v)} \prod_{l\in J_0^i}(b_l-v_l+1)(b_i-v_i)+1 = b_{j_p}-v_{j_p}+1+(b_{j_p}-v_{j_p}+1)(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}})+$$

$$+(b_{j_p}-v_{j_p}+1)(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}}+1)(b_{j_{p-2}}-v_{j_{p-2}})+\ldots+(b_{j_p}-v_{j_p}+1)(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}}+1)\times$$

$$\times\ldots\times(b_{j_3}-v_{j_3}+1)(b_{j_2}-v_{j_2}+1)(b_{j_1}-v_{j_1}) = (b_{j_p}-v_{j_p}+1)(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}}+1+$$

$$+(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}}+1)(b_{j_{p-2}}-v_{j_{p-2}})+\ldots+(b_{j_{p-1}}-v_{j_{p-1}}+1)(b_{j_{p-2}}-v_{j_{p-2}}+1)\ldots(b_{j_3}-v_{j_3}+1)\times$$

$$\times(b_{j_2}-v_{j_2}+1)(b_{j_1}-v_{j_1})) = \prod_{l\in J_0^i}(b_l-v_l+1).$$

Итак, точка u сохраняется отсечением $\bar\gamma^*(v,P)$, что противоречит условию леммы. Отсюда следует, что $u_{\eta(u,v)} - v_{\eta(u,v)} > -1$.

Так как $v_{\eta(u,v)}$ - целое, то $u_{\eta(u,v)}$ - дробное. Значит, $\eta(u,v) = \varphi(u) < \varphi(v)$ и, следовательно:

$$\varphi(u) \in J_0(v,P)\cup J_+(v,P);$$
$$\lfloor u_{\eta(u,v)}\rfloor = v_{\eta(u,v)} - 1;$$
$$\bar J_-^{\varphi(u)}(v,P) = J_-(u,P);$$
$$\bar J_0^{\varphi(u)}(v,P) = J_0(u,P);$$
$$\bar J_+^{\varphi(u)}(v,P) = J_+(u,P).$$

Остается показать, что если некоторая точка $x\in P$ отсекается неравенством $\bar\gamma^*(v,P)$, то она отсекается и неравенством $\bar\gamma^*(u,P)$.

$$0 < (\gamma^*(v,P),x) - \gamma_0^*(v,P) = \sum_{j\in \bar J_0^{\varphi(u)}(v,P)\cup \bar J_+^{\varphi(u)}} \gamma_j^*(x_j-v_j) + \gamma_{\varphi(u)}^*(x_{\varphi(u)}-v_{\varphi(u)})+$$

$$+\sum_{j\in J_0^{\varphi(u)}\cup J_+^{\varphi(u)}, j<\varphi(v)} \gamma_j^*(x_j-v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor = (b_{\varphi(v)}-\lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor)\times$$

$$\times\sum_{j\in \bar J_0^{\varphi(u)}\cup \bar J_+^{\varphi(u)}} \prod_{l\in J_0^j}(b_l-v_l+1)(x_j-v_j)+(b_{\varphi(v)}-\lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor)\prod_{l\in J_0^{\varphi(u)}}(b_l-v_l+1)(x_{\varphi(u)}-v_{\varphi(u)})+$$

$$+\left(b_{\varphi(v)}-\lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor\right)\sum_{j\in J_0^{\varphi(u)}\cup J_+^{\varphi(u)}, j<\varphi(v)} \prod_{l\in J_0^j}(b_l-v_l+1)(x_j-v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor =$$

$$=\left(b_{\varphi(v)}-\lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor\right)\prod_{l\in J_0^{\varphi(u)}}(b_l-v_l+1)(b_{\varphi(u)}-v_{\varphi(u)}+1)\sum_{j\in \bar J_0^{\varphi(u)}\cup \bar J_+^{\varphi(u)}}\prod_{l\in J_0^j\cap \bar J_0^{\varphi(u)}}(b_l-v_l+1)\times$$

$$\times(x_j-v_j)x_{\varphi(u)}-v_{\varphi(u)}) + \left(b_{\varphi(v)}-\lfloor v_{\varphi(v)}\rfloor\right)\sum_{j\in J_0^{\varphi(u)}\cup J_+^{\varphi(u)}, j<\varphi(v)}\prod_{l\in J_0^j}(b_l-v_l+1)\times$$

$$\times(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor = \Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)\Big(\Big(b_{\varphi(u)} - \lfloor u_{\varphi(u)} \rfloor\Big) \times$$

$$\times \sum_{j \in \bar{J}_0^{\varphi(u)} \cup \bar{J}_+^{\varphi(u)}} \prod_{l \in J_0^j \cap \bar{J}_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)(x_j - v_j) + x_{\varphi(u)} - \lfloor u_{\varphi(u)} \rfloor - 1\Big) +$$

$$+\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor =$$

$$= \Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)((\gamma^*(u, P), x) - \gamma^*(u, P) - 1) +$$

$$+\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor > 0.$$

Следовательно,

$$(\gamma^*(u, P), x) - \gamma_0^*(u, P) > 1 - \Big(\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) \times$$

$$\times(x_j - v_j) + x_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big)\Big(\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)\Big)^{-1} >$$

$$> 1 - \Big(\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(b_j - v_j) + b_{\varphi(v)} -$$

$$- \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big)\Big(\Big(b_{\varphi(v)} - \lfloor v_{\varphi(v)} \rfloor\Big) \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)\Big)^{-1} = 1 - \Big(\sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1) \times$$

$$\times(b_j - v_j) + 1\Big)\Big(\prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1)\Big)^{-1} = 1 - 1 = 0,$$

так как по доказанному ранее

$$\sum_{j \in J_0^{\varphi(u)} \cup J_+^{\varphi(u)}, j < \varphi(v)} \prod_{l \in J_0^j} (b_l - v_l + 1)(b_j - v_j) + 1 = \prod_{l \in J_0^{\varphi(u)}} (b_l - v_l + 1).$$

■

Лемма 4.2. *Пусть $X = \{x^k\}_{k=1}^t$ - последовательность, порождаемая процессом A^*, $y \in P$ - нецелочисленная точка и $y \succ x^p$ для некоторого $p \in \{1, \dots, t-1\}$. Тогда любое отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(y, P)$ отсекает не более одной точки x^k, $k \geq p$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что отсечение $\bar{\gamma}$ из $\Gamma(y, P)$ отсекло точки x^q и x^r, $p \leq q \leq r$. По теореме 4.1 $\bar{\gamma}$ не сильнее, чем $\bar{\gamma}^*(y, P)$, значит $\bar{\gamma}^*(y, P)$ отсекает точки x^q и x^r. Так как x^q и x^p не являются L-эквивалентными и так как $y \succ x^p \succ x^q$, то y и x^q так же не являются L-эквивалентными. Тогда по лемме 4.1 $\bar{\gamma}^*(y, P)$ не сильнее $\bar{\gamma}^*(x^q, P)$, но из условия теоремы мы знаем, что $\bar{\gamma}^*(x^q, P)$ не отсекает точку x^r. Противоречие. ■

Теорема 4.2. *Пусть $\Omega \subset P$. Для решения задачи (1.4) процессом A^* потребуется итераций не больше, чем процессом A.*

Доказательство. Действительно, отсечение, построенное по любой точке y, порожденной процессом A, отсекает, согласно леммы 4.2, не более одной точки последовательности X. Следовательно, процессу A потребуется итераций не меньше, чем процессу A^*. ■

Литература

1. Заблоцкая О.А. *О сравнении вполне регулярных алгоритмов отсечения* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.25. 1984. С.68-74.

2. Колоколов А.А. *Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации.* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.21. 1981. С.18-25.

3. Колоколов А.А. *Методы дискретной оптимизации: Учебное пособие.* Омск: ОмГУ, 1984. 75 с.

4. Колоколов А.А.*Метод оценочных разбиений в целочисленном программировании* // Теория и программная реализация методов дискретной оптимизации. Киев: ИК АН УССР, 1989. С.44-47.

5. Колоколов А.А.*О наискорейшем алгоритме в одном классе регулярных процессов отсечения* // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях: Тез. докл. III Всесоюз. совещ. Ташкент - Новосибирск, 1984. Ч.2 С.70.

6. Симанчев Р.Ю. *О вполне регулярных отсечениях для задач целочисленной оптимизации* // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. Вып.30. 1990. С.61-71.

7. Симанчев Р.Ю. *Сравнение вполне регулярных отсечений и алгоритмов* // Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации: Сб. науч. тр. Омск: ОмГУ, 1992. С.108-122.

8. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* Москва: Мир, 1991. Т.1. 340 с.