Математические структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.98-103.

УДК 681.14

ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ ВЕКТОРНОМУ И КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ С ПОМОЩЬЮ ЗНАКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Л.И. Боженкова

In this paper we discribe the simbol model to learn the school-children for vector and coordinate-vector methods.

Использование моделей как основного средства наглядности в обучении математике общепризнано. Согласно В.А. Штофору, «под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна заменять его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте». К знаковым моделям относятся схемы, таблицы, формулы и т.п. Среди знаковых моделей особое место в обучении занимают предписания по решению задач определенного типа. Различают предписания алгоритмического, полуалгоритмического, полуэвристического, эвристического типов (Л.Н. Ланда). В предписаниях органично соединены содержательные и оперативные знания. Блок-схемная форма записи предписаний выступает в качестве наглядного способа фиксации структурных взаимосвязей между данными и искомыми объектами и моделирует действия и операции по их изучению. Следовательно, предписания являются моделями общих методов решения задач определенного типа. Необходимость таких моделей обусловливается тем, что, как известно из психологии, в мышлении многие из операций мыслительного процесса при усвоении знаний чаще всего не осознаются, что затрудняет применение этих знаний (Груденов Я.И., Кабанова-Меллер Е.Н., Подгорецкая Н.А., Талызина Н.Ф.). Чтобы этого избежать, необходимо при формировании мыслительного процесса выявить эти операции, а затем специально обучать им. Ясно, что это обучение будет тем эффективнее, чем совершенней используется моделирование. Использование предписаний в качестве моделей в практике обучения недооценивается (Л.М. Фридман). При построении моделей используется теоретико-экспериментальный метод моделирования (Н.Ф. Талызина) с учетом анализа сложившихся видов деятельности по решению задач определенных типов. Модель, построенная теоретическим путем, проходит экспериментальную проверку и, в случае необходимости, дальнейшую доработку.

Омский государственный педагогический университет

Таблица 1

Классы задач	Типы предписаний, соответствующих классам задач	Форма записи знаковой модели
1. Задачи на построение векторов	Предписания алгоритмического типа по построению суммы, разности двух векторов; вектора, равного произведению вектора на число	Блок-схема
2. Задачи на доказательство равенства векторов	Предписание полуалгоритмического типа	Блок-схема
3. Задачи на доказательство коллинеарности векторов	Предписание полуалгоритмического типа	Блок-схема
4. Задачи на вычисление координат векторов	Предписание алгоритмического типа	Блок-схема
5. Задачи на разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	Предписание алгоритмического типа	Блок-схема
6. Задачи, решаемые векторным методом (без векторного содержания)	Предписание эвристического типа	

Векторный и координатно-векторный методы — фундаментальные понятия современной математики — были включены в школьную программу сравнительно недавно. Анализ содержания школьных и вузовских учебников геометрии с учетом результатов эксперимента позволил выделить среди задач, решаемых векторным и координатно-векторным методами, определенные классы задач. Данная классификация, согласно Д. Пойа, предполагает разделение задач на такие классы, что класс задачи предопределяет метод ее решения. В таблице 1 представлены классы задач, решаемых векторным и координатно-векторным методами и соответствующие им предписания, модели общих методов их решения.

Анализ алгоритмических предписаний по решению различных классов задач векторным и координатно-векторным методом показывает, что некоторые из них имеют сходную структуру. Для успешного решения задач на доказательство этим методом необходимо обеспечить элементарность блоков 2–3 этих предписаний. Анализ действующих учебных пособий по геометрии показывает отсутствие таких упражнений. Для формирования умений решать задачи вы-

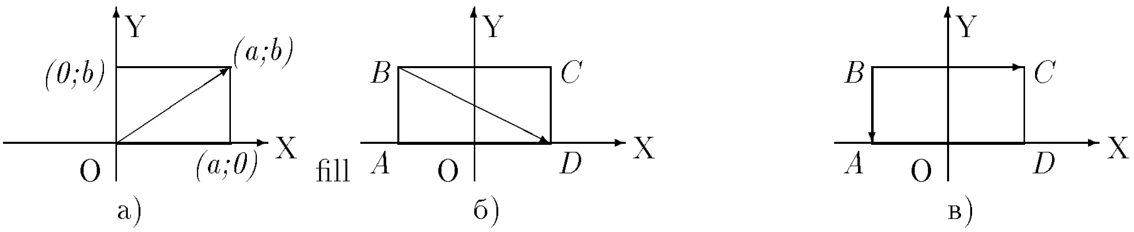


Рис. 1

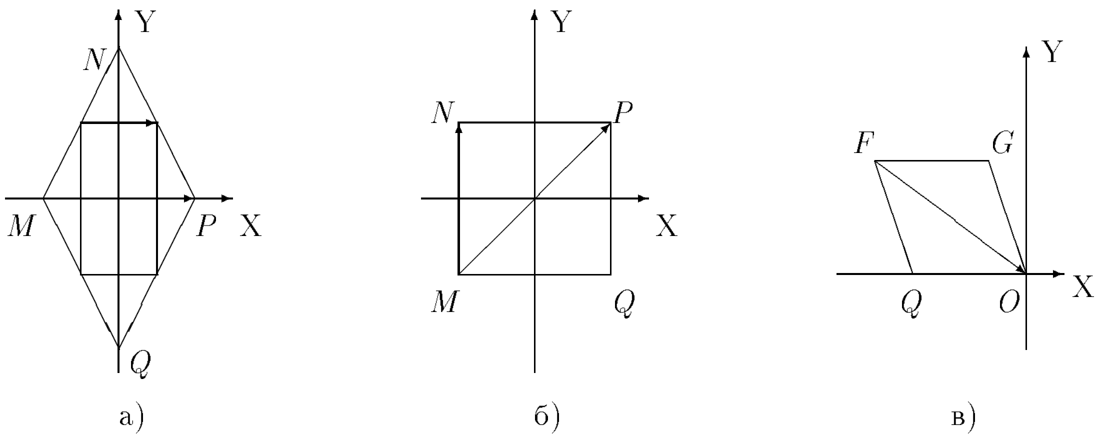


Рис. 2

деленных классов используется теория П.Я. Гальперина.

Рассмотрим в качестве примера фрагменты методики формирования умений решать задачи на доказательство перпендикулярности векторов в координатной форме.

На подготовительном этапе мы предъявляли учащимся упражнения следующего содержания.

> *Рассмотрите рисунок 1 (рис. 2): а) объясните, почему координаты вершин прямоугольника (ромба) обозначены так, как на рисунке 1 (а) (2 (а)); б) как можно обозначить координаты точек на рисунках 1 (б,в) (2 (б,в))? в) какой выбор системы координат вы считаете наиболее удачным? почему? г) найдите координаты векторов, обозначенных на рисунках.*

Экспериментальное обучение показало, что итогом подготовительного этапа явилось понимание учащимися возможности выбора системы координат, введения координат точек и нахождения координат векторов в зависимости от содержания задачи.

На ознакомительном этапе учащиеся составляли алгоритмическое предписание по доказательству перпендикулярности векторов на основе следующего решения набора задач.

1. *Даны векторы* $\vec{a}(1;0)$ *и* $\vec{b}(1;1)$. *Докажите, что при* $\lambda = -1$ *векторы* $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ *и* $\vec{a}$ *перпендикулярны.*

2. *Даны точки* $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$. *Докажите, что четырехугольник* $ABCD$ *— прямоугольник.*

3. *Докажите, что середины сторон любого прямоугольника являются вершинами ромба. При каком условии они будут вершинами квадрата?*

4. *Дан четырехугольник* $ABCD$: $A(-3;0)$, $B(-1;2)$, $C(2;-1)$, $D(0;-2)$. *Имеет ли он перпендикулярные стороны?*

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо было довести до понимания учащихся, что это задачи одного класса. Поэтому предварительно учащиеся ответили на следующие вопросы.

1. *Каким методом решаются задачи? (С помощью чего решаются задачи?)*

2. *Что является общим в требованиях всех задач?*

3. *Есть что-либо общее в условиях этих задач?*

4. *Можно ли получить векторы, используя условие задачи?*

5. *Как установить перпендикулярность векторов?*

Далее учащиеся самостоятельно решали задачу 1, предварительно коллективно проанализировав ее. Итогом решения задачи 1 явились ответы учащихся на следующие вопросы, сопровождающиеся «открытием» блоков алгоритмического предписания.

1. *Была ли введена система координат? Почему? (Открывается первый блок алгоритмического предписания.)*

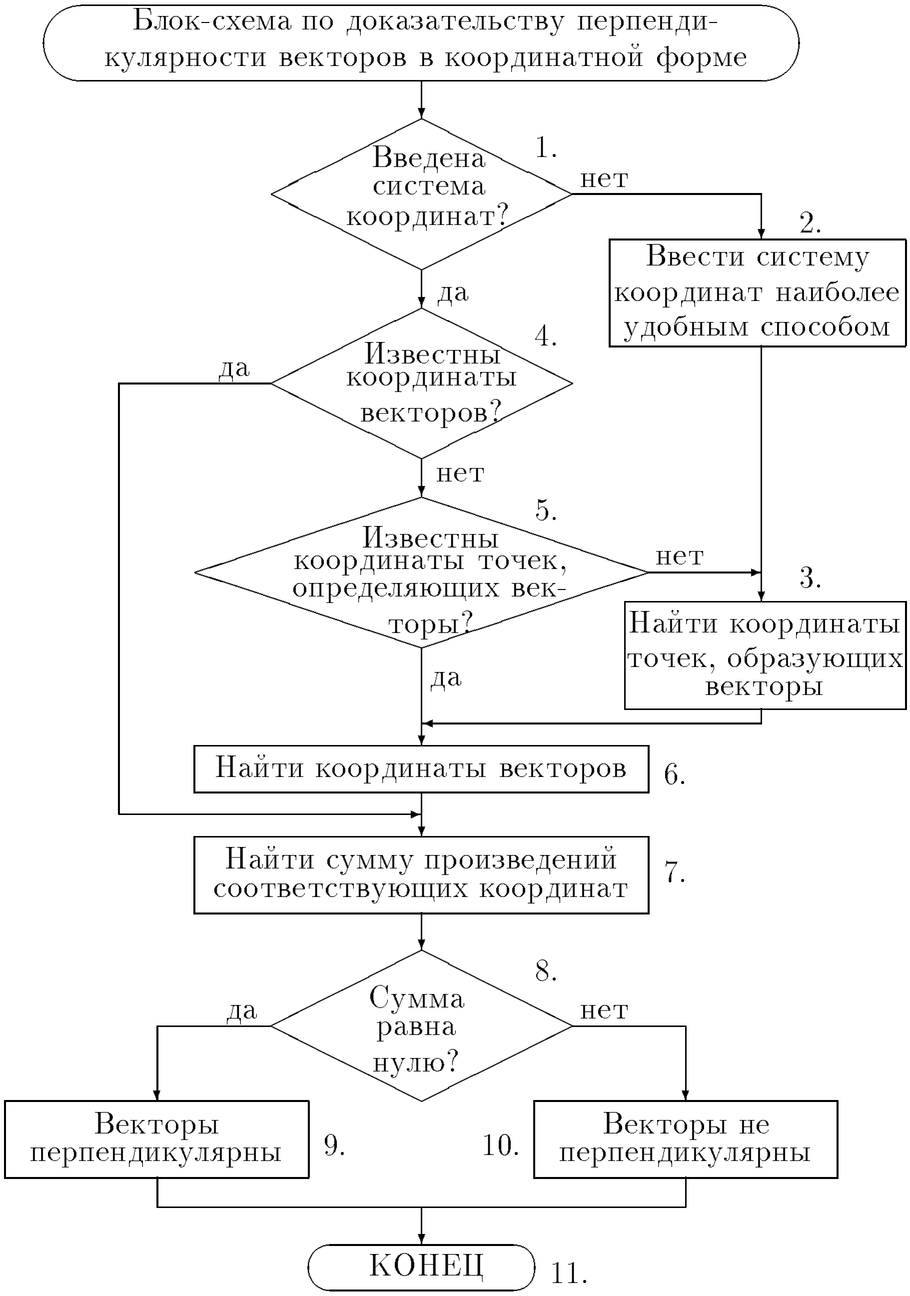
2. *Известны координаты векторов, необходимых для решения задачи? («вектор* $\vec{a}$ *известен, вектор* $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ *определяется посредством известных операций»). Ответ на вопрос сопровождается открытием блока 4 алгоритмического предписания.*

3. *Сформулируйте условие, которым вы воспользовались для решения задачи (открываются блоки 6, 7, 8, 9, 11) алгоритмического предписания (Таблица 2).*

Учебная деятельность учащихся при решении задачи 2, задачи 3 и задачи 4 организуется аналогично. Итогом решения задачи 2 является «открытие» блоков 5, 6, задачи 3 — блоков 2, 3; задачи 4 — блока 10.

На формирующем этапе продолжается становление умения решать задачи на доказательство перпендикулярности векторов с использованием алгоритмического предписания. Дидактическая цель этого этапа — формирование умения решать задачи рассматриваемого класса сначала с использованием алгоритмического предписания, а затем без его использования.

Таблица 2


Блок-схема по доказательству перпендикулярности векторов в координатной форме
1.
Введена система координат?
нет
2.
Ввести систему координат наиболее удобным способом
да
4.
Известны координаты векторов?
да
нет
5.
Известны координаты точек, определяющих векторы?
нет
3.
Найти координаты точек, образующих векторы
да
Найти координаты векторов
6.
Найти сумму произведений соответствующих координат
7.
8.
Сумма равна нулю?
да
нет
Векторы перпендикулярны
9.
10.
Векторы не перпендикулярны
КОНЕЦ
11.

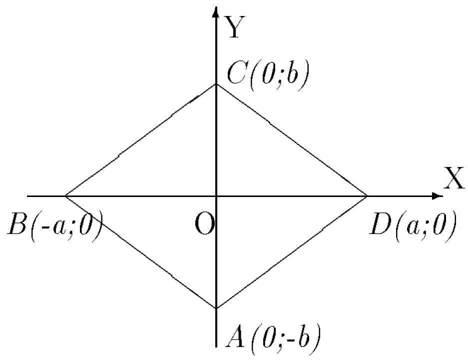


Рис. 3

Чтобы успешно решить задачи на этапе, формирующем умения, необходимо сделать перенос формируемого метода II способом, т.е. решить задачу, значительно отличающуюся от решенных ранее, используя общий метод решения задач данного класса. Эксперимент показал, что часть учащихся отнесла задачу к рассматриваемому классу, т.е. они усвоили общий метод решения задач данного класса на уровне умения. Учащиеся, которые смогли решить задачу только после коллективного поиска метода ее решения, усвоили этот метод на уровне навыка.

Приведем пример деятельности первой части учащихся в процессе решения одной из задач этапа, формирующего умение.

Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Учащиеся анализируют задачу, используя алгоритмическое предписание и находят «маршрут» — «нет», «да», т.е. выполняются команды блоков: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9 (таблица 2). Результат выполнения команды блока 2 — выбор системы координат таким образом, чтобы диагонали ромба лежали на осях координат. Целесообразность выбора обосновывается учащимися (рис. 3).

Далее они вводят обозначения координат точек (команда блока 3) находят координаты векторов (команда блока 6), вычисляют сумму произведений соответствующих координат искомых векторов (команда блока 7) и, проверяя условие блока 8, делают вывод.

На этапе, совершенствующем умение, предусматривается решение любых задач рассматриваемого класса, а также таких, в которых сформированное умение является одним из действий.