

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

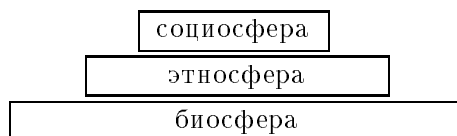
А.А. Лаптев

The goal of our work is to attempt and describe social processes in a mathematical language and to build a system of differential equations describing global evolution of the society. We build a model of social process with a periodic (cyclic) and stable solution.

1. Введение

Цель данной работы – построение математической модели глобальных социальных процессов. Под глобальным процессом понимается процесс, проявление которого становится заметным в большие отрезки времени – в несколько сотен лет.

В этой работе мы будем использовать следующую структурную схему общества:



На нижнем геобиотическом уровне общество людей представляет собой подсистему экологической системы, участвующую в обмене биомассой с другими подсистемами данного уровня. Математическая модель этого уровня описана в [9].

На втором этническом уровне общество – это уже коллектив индивидов, способных к единым неосознанным действиям и характеризующихся определенным стереотипом поведения, порожденным ландшафтными условиями местожительства. Такое общество называется *этносом*. Данный уровень описан в теории этногенеза Л.Н.Гумилева [1, 2]. Математическая модель этноса построена профессором А.К.Гуцом [3].

На третьем социальном уровне мы имеем дело с *обществом* в самом распространенном смысле этого слова. В этой работе предложена математическая

модель данного уровня, построенная на основе теории общества американского социолога Т.Парсонса [12, 13, 14].

В данной работе мы также будем использовать теорию цикличности, которая является одной из интерпретаций мирового исторического процесса. Эта теория утвердилась на рубеже XIX-XX веков в Европе работами О.Шпенглера, А.Тоинби, Н.Данилевского и других. По их мнению, каждое общество проходит определенные стадии развития, роста, надлома и разложения. С расширением культурного горизонта возобладало представление о многообразии культурных типов. Н.Я.Данилевский выделил 10 типов, А.Тоинби - 21 цивилизацию.

Русские экономисты являются основателями теории циклической динамики общества. Н.Д.Кондратьев в 30-х годах XX века на основе большого массива статистических данных и математического моделирования социально-экономических процессов пришел к выводу, что каждые полвека большие циклы экономической конъюнктуры сменяют друг друга [8]. Каждый такой цикл в свою очередь является элементом «векового» цивилизационного цикла, меняющегося через 200-300 лет. Н.Кондратьев считал, что данная закономерность позволяет более обоснованно прогнозировать тенденции в развитии экономики, назревание кризисов. Теория циклов рассматривается как инструмент социально-экономического предвидения. В рамках исторических суперциклов рассматриваются закономерности и тенденции изменений технологии, экономики, социально-политической сферы.

2. Общество

Социальная система – это универсальный способ организации общественной жизни, который возникает в результате взаимодействия социальных действий на базе диктуемых социальных ролей. Она объединяется в упорядоченное и самосохраняющееся целое образцами норм и ценностей, обеспечивающих взаимозависимость частей системы и интеграцию целого¹.

Люди в своей жизни постоянно действуют, совершают поступки. Поэтому вводится понятие социального действия. *Социальное действие* – это действие человека внешнего или внутреннего характера, которое предполагает, что действующий индивид или индивиды связывают с ним субъективный смысл, и которое соотносится с действием других людей и ориентируется на него. Содержание действия образуют структуры и процессы, на основе которых люди формируют и реализуют осмысленные намерения (слово «осмысленный» предполагает символический (культурный) уровень смыслового представления и описания) [12, с.94].

Система социальных действий анализируется Т.Парсонсом в терминах следующих функциональных характеристик составляющих ее четырех подсистем:

- 1) **поведенческий организм** служит для адаптации к окружающей физической природной среде;
- 2) **этническая система** предназначена для формирования главных, «руково-

¹При написании параграфов 1 и 2 было использовано учебное пособие А.К.Гуца [3]

дящих» или контролирующих этнических образцов;

3) **система личности** служит ориентации на достижение цели;

4) **социальная система** направлена на достижение внутренней интегрированности (солидарности).

Действительно, каждый человек представляет собой:

1) биологический организм;

2) субъект некоторого этноса (подсознание);

3) личность;

4) член общества (сознание).

Входя в этнос, человек становится носителем вполне определенного поведения. Факторы, обуславливающие стереотип поведения, усваиваются в процессе научения через условный рефлекс подражания на этническом уровне, а на социальном – в процессе обучения (социализации, [17, Гл. 4]), при котором важнейшую роль играют символически организованные *этнические образцы*. Отметим, что в американской социологии вместо слова «этнический» используется слово «культурный» [17, Гл. 2]. По существу, эти понятия практически совпадают (например, Т.Парсонс выделяет три основных момента в определении культуры: передаваемость в поколениях, обучаемость и общепринятость [13, с.458]). Поэтому их можно отождествлять (см.[12, с.95], [17, с.97-98]). Этнические образцы подвергаются на социальном уровне институциональному, то есть закреплению посредством возникающих в системе действий институтов управления, власти. Будем называть их, следуя Парсонсу, *институциональными этническими образцами*.

Система культуры и искусства (этнос) преобразует *нормативные образцы* в ценностные ориентации, относящиеся к окружающему физическому миру, организмам, личностям и социальным системам. Этническая система «становится механизмом, через который общественная система функционирует и приобретает стабильность...». При этом она «дает толчок социальным изменениям, способствует эволюции всей системы» [15, с.32].

Организм каждого человека, его окружение (физическое, этническое и социальное) всегда уникальны. Поэтому его собственная поведенческая система – система личности, является уникальным вариантом культуры этноса и присущих ей образцов действия. Личность ориентирована на достижение целей по отношению к окружающей среде. Следовательно, *система личности* – самостоятельная подсистема системы социальных действий, не сводимая ни к организму, ни к этнической системе.

Описанию социальной системы и построению математической модели посвящена эта работа².

3. Социальная система

Процесс социального взаимодействия образует четвертую подсистему системы социальных действий – *социальную систему*. При ее анализе на первый план вы-

² Более подробное описание социальной системы см. в [10, 12].

ступает процесс интеграции (солидарности), столь необходимый социальным отношениям из-за внутренней расположенности к конфликту и дезорганизации.

Интеграция – это «такие структуры и процессы, посредством которых отношения между частями социальной системы ... либо упорядочиваются способом, обеспечивающим гармоническое их функционирование в соответственных связях друг с другом в системе, либо, наоборот, не упорядочиваются, причем тоже каким-нибудь определенным и объяснимым способом» [15, с.59].

Для анализа *социальной системы* также применим системный подход, рассматривающий четыре подсистемы (*социетальное сообщество, систему поддержания институциональных этнических образцов, политическую и экономическую системы*), их функциональное назначение и взаимосвязи.

3.1. Социетальное сообщество

Проблема интеграции общества – сохранение устойчивости, внутреннего единства, солидарности. Данная функция осуществляется институтами социального контроля посредством создания и поддержания общих норм и ценностей. Ядром общества как системы является структурированный (особо организованный) *нормативный порядок*. С его помощью организуется коллективная жизнь населения. Единый коллектив, деятельность которого основана на объединении людей, сознательно принимающих нормативный порядок, называется *социетальным сообществом*. Многие из этих норм, «навязанных» коллективу, предполагают контроль за их соблюдением, например, через полицейские функции и различные репрессивные и другие санкции. Основная функция подсистемы *Социетальное сообщество* – интеграция людей. Она осуществляется через поддерживающие устойчивость сцепления охранные и контролирующие факторы.

По мере развития сообщества происходит видимое разделение, разобщение людей через общественное разделение труда. Однако, как показал Дюркгейм, специализируясь, разобщаясь по сферам узкой трудовой деятельности, люди все более нуждаются в особой интеграции, названной им *органической солидарностью* [6]. Эта солидарность организуется посредством *кооперативного* или *реститутивного права*. Последнее включает право собственности, семейное, договорное, коммерческое, процессуальное, административное и конституционное. Естественно, предполагаются соответствующие *реститутивные санкции*, то есть меры по восстановлению прежнего правового, имущественного и т.д. состояния.

Значимость реституции и органической солидарности на социальном уровне определяется степенью развитости политической системы общества (государственной гарантией выполнения реститутивных санкций). Принятие нормативного порядка сообществом зависит от его *легитимности*.

3.2. Подсистема поддержания институциональных этнических образцов

Легитимация порядка – это его признание, поддержка со стороны населения. Система легитимации определяет основания для разрешений и запретов. «Правильно» то, что делается в соответствии с *институционализированным порядком*, то есть порядком, закрепленным соответствующими институтами власти. Сама власть также требует легитимации.

Объединение людей в сообщество происходит прежде всего на этническом уровне³. На этом же уровне есть понятие организации этноса, в которой закреплены стереотип поведения членов этноса, его структура, нравы, обычаи, иными словами, образцы поведения⁴. Поскольку социальные формы развиваются параллельно и отчасти, независимо от этнических форм, то многие этнические образцы поведения подвергаются *институализации*.

Эти *институциональные этнические образцы* легитимны по своему происхождению и образуют *подсистему поддержания институциональных этнических образцов*⁵. Говоря «поддержание», мы имеем в виду систему мер, законов и так далее, защищающих эти образцы поведения со стороны действующей власти.

Нормативный порядок для своей легитимации требует соотносительности с этническими образцами поведения (главным образом доминирующего этноса). В этом заключается основа взаимоотношений общества с этнической системой.

«Процесс повышения степени общности образца тем не менее часто встречает серьезное сопротивление, поскольку приверженность различных групп ценностному образцу часто выступает в форме приверженности какому-то его конкретному содержанию, соответствующему более низкому уровню общности. Подобное сопротивление может быть названо *фундаментализмом*» [12, с. 116].

Общество нуждается в системе поддержания институциональных образцов поведения, ибо это его этническая основа. Это *коллективное сознание* общества, если выражаться языком Дюркгейма, то есть то, что склеило, объединило людей в сообщество в момент зарождения этноса или суперэтноса. Оно ослабевает, распадается по мере развития общества, в процессе раскрепощения индивидуальных сознаний членов общества, что тесно связано с разделением общественного труда. Коллективное сознание связано с понятием *механической солидарности* [6] членов сообщества, с их едиными социальными действиями, опирающимися на организацию (структуру) суперэтноса, нравы, мораль, ре-

³ «... Лишь с формированием культурного образца, особенно оценочного ориентира, в социальной структуре обеспечивается взаимное соединение личности, социальной системы и культуры» [15, с.35].

⁴ «Образцы социального действия – нормы, правила того, как должен вести себя человек в обществе, какие цели он должен ставить перед собой и какими средствами может их добиваться» [15, с.58].

⁵ «... Эти образцы создаются индивидуальными исполнителями и распространяются в социальной системе благодаря диффузии, а среди личностей – благодаря процессу обучения» [15, с.21].

лигию и т.д., характерные для данного суперэтноса. Все это на уровне институционализации являет собой *уголовное право* общества. Государство защищает его посредством *репрессивных санкций*.

3.3. Политическая система

Политическая система служит, по Парсонсу, обеспечению достижения общих целей. Политическая система состоит из государства, политических партий и общественных организаций, лоббизма, политической элиты и политической культуры. Чтобы власть имела хоть какую-то общественную значимость, ее требования должны быть «узаконены» и зафиксированы в системе «нормативно-директивных» отношений, обеспечивающих ее устойчивость [15, с.79]. Политическая система на начальном этапе обособляется от социетального сообщества в силу того, что необходимо институализировать, придать особый статус таким параметрам услуг, которые может предложить системе личность, как ответственность за координацию коллективных действий (лидерство, авторитет личности), компетентность и профессионализм.

3.4. Экономическая система

Экономическая система определяет степень адаптации общества к окружающей физической среде; степень выживания людей, где первичным является обеспечение людей пищей и жильем. «Экономика есть та часть общественной структуры, где производятся и распределяются материальные продукты, необходимые членам общества» [15, с.43]. Она служит для включения технологических процедур в социальную систему, а также для контроля за ними в интересах общества. Важным (интегрирующим) элементом здесь являются институты собственности, договорных отношений и регулирования условий занятости, что предполагает управление со стороны государства. Экономика стремится ослабить влияние политической системы и системы поддержания ценностных (этнокультурных) образцов [12, с.118]. Прогресс общества связан с усилением адаптивных возможностей. Последнее определяется ростом разделения общественного труда и ослаблением роли традиций [12, с.115], то есть этнических образцов, наличием минеральных ресурсов, капиталовложений и сельхозинвестиций.

4. Математическая модель социогенеза

В основе предлагаемой модели социогенеза лежит схема описания общества, принадлежащая Т.Парсонсу. Парсонс выделяет составляющие ее подсистемы: социетальное сообщество, систему поддержания институциональных этнических образцов, экономическую и политическую систему, которые были подробно описаны во втором разделе. Им сопоставим соответственно уровни: интеграции = органической солидарности K , интеграции = механической солидарности D , адаптации к окружающей природной среде E и обеспечения достижения общих

целей G . Динамику изменения данных уровней опишем системой дифференциальных уравнений. Переход от формального описания подсистем общества к некоторым, казалось бы, абстрактным математическим функциям (и к динамике этих функций) вполне согласуется с теорией Т. Парсонса, т.к. «понятие «функция» используется в структурном функционализме Парсонса в его математическом значении: этим понятием обозначаются формы такой зависимости между величинами, при которой изменение одних (аргументов) сопровождается изменением других величин (переменных)» [15, с.51].

Если изучается динамика величины X , в левой части уравнения пишется вначале ее скорость изменения во времени в момент t , а затем знак равенства. В правой части по очереди выписываются потоки, непосредственно связанные с составляющими системы, причем перед потоком ставится знак «+», если поток содействует развитию X , и знак «-», если сдерживает развитие. Также мы постараемся учесть периодичность в историческом процессе. Для этого мы применим теоремы, показывающие, что система имеет периодическое решение⁶.

4.1. Описание системы

В ходе построения модели были получены несколько систем (учитывались разные факторы и разные определения управляющего параметра), но почти во всех решениях не было периода. В качестве управляющего параметра (он нужен для исследования цикличности) возьмем уровень *Пассионарного напряжения* (характеристику этноса), так как социальная система контролируется (в рамках нашей теории) только этническими факторами. По определению Л.Н. Гумилева *Пассионарное напряжение* – пассионарность, приходящаяся на одного члена общества⁷. «Качественные характеристики *пассионарного напряжения* следует рассматривать как некую усредненную оценку представителей этноса» [2, с.123].

Построим систему так, чтобы при достижении какого-то уровня *Пассионарного напряжения* ($\mathcal{P}$) система, потеряв устойчивость стационарного равновесия, обретала новое циклическое состояние.

Политическую, экономическую систему, социетальное сообщество и систему поддержания институциональных этнических образцов будем описывать функциями $G(t)$, $E(t)$, $K(t)$ и $D(t)$ соответственно, возрастание которых означает усиление интегрирующих общественных сил, а их убывание – ослабление.

Развитие **политической системы** опишем уравнением:

$$\frac{dG}{dt} = G_G + G_E + G_K,$$

⁶ В этих теоремах требуется непрерывность правых частей, и это, в какой-то степени, предопределяет вид уравнений.

⁷ «*Пассионарность как энергия* – это избыток биохимической энергии живого вещества (людей), подавляющий в человеке инстинкт самосохранения и определяющий способность к целенаправленным сверхнапряжениям. *Пассионарность как характеристика поведения* – эффект избытка биохимической энергии живого вещества (людей), порождающий способность к самопожертвованию ради (часто) иллюзорной цели» [3, с.65].

где

$G_G = k_{GG}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1) \cdot G$ – степень реакции властей на отклонение от общественного строя; вклад правительства в строительство основ государственности; учет инерционности в развитии.

$G_E = k_{GE}e^{-\mu E + \mu_1} \cdot E$ – усилия людей по укреплению политического режима за счет экономики⁸. Степень этих усилий определяется условиями жизни, т.е. уровнем развитости экономики.

$G_K = k_{KK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)(K + D)G$ – поддержка политической системы обществом⁹, легитимация власти (при достаточном уровне *Пассионарного напряжения* ($\mathcal{P} > \mathcal{P}_1$)).

Динамика **экономики** описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dE}{dt} = E_E - E_G - E_K,$$

где

$E_E = k_{EE}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1) \cdot E$ – усилия людей по развитию экономики (чем больше *Пассионарное напряжение* $\mathcal{P}$, тем более действенны эти меры, причем на начальном этапе эти меры сказываются отрицательно, так как $e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1 < 0$, а далее позитивно $e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1 > 0$).

$E_G = k_{EG} e^{-\eta G + \eta_1} \cdot G$ – ограничения на экономику¹⁰, накладываемые политикой (чем более развита политическая система, тем меньше ограничений, т.к. политическая система уже менее нуждается в экономической подпитке).

$E_K = k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)(K + D)E$ – ограничения на экономику, накладываемые традицией и нормативным порядком¹¹ (при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_2$), и некоторый толчок (поддержка) в начале развития (при $\mathcal{P} < \mathcal{P}_2$).

Динамику **социетального сообщества** опишем следующим уравнением:

$$\frac{dK}{dt} = K_G - K_K - K_D,$$

где

$K_G = k_{KG}(G^2 + E^2)$ – контроль за соблюдением нормативного порядка, борьба государства с преступлениями против порядка, реститутивные санкции[6], кооперативное право (чем сильнее государство и чем больше адаптация к окружающей среде (экономика), тем сильнее контроль¹²).

$K_K = k_{KK} e^{-\gamma K + \gamma_1} \cdot K \cdot \mathcal{P}$ – потери при действиях, направленных на поддержку авторитета традиции, легитимации устанавливаемого нормативного порядка (при достаточно высоком уровне K затраты незначительны).

⁸ «...Экономика возлагает, в некотором роде, на политическую систему ответственность за мобилизацию ресурсов» [15, с.79].

⁹ «...Власть требует «Узаконивания» [15, с.73].

¹⁰ «... Экономика стремится отделиться ... и от политической системы» [12, с.118].

¹¹ «... Экономика стремится отделиться ... также от тех аспектов системы поддержания образца, которые связаны с родством» [12, с.118].

¹² «Государство гарантирует выполнение реститутивных санкций; экономика определяет жизненный уровень населения, что способствует нормальному отправлению государством своих репрессивных функций» [3, с.120].

$K_D = k_{KD} \cdot D^2$ – нормативный порядок требует соотнесенности с этническими образцами¹³; сопротивление традиции; фундаментализм.

Развитие системы поддержания институциональных этнических образцов опишем уравнением:

$$\frac{dD}{dt} = D_G - D_D - D_K,$$

где

$D_G = k_{DG} \cdot G^2$ – контроль за образцами поведения¹⁴, борьба государства с уголовными преступлениями, репрессивные санкции, уголовное право.

$D_D = k_{DD} e^{-\omega D + \omega_1} \cdot D \cdot \mathcal{P}$ – затраты на поддержание авторитета традиции, легитимации устанавливаемого нравственного порядка (при достаточно высоком уровне D эти затраты минимальны).

$D_K = k_{DK} \cdot K^2$ – соотнесенность с нормативным порядком.

Таким образом, мы получили систему:

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = k_{GG}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1)G + k_{GE} e^{-\mu E + \mu_1} \cdot E + k_{GK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)(K + D)G \\ \frac{dE}{dt} = k_{EE}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1)E - k_{EG} e^{-\eta G + \eta_1} \cdot G - k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)(K + D)E \\ \frac{dK}{dt} = k_{KG} \cdot (G^2 + E^2) - k_{KK} e^{-\gamma K + \gamma_1} \cdot K \cdot \mathcal{P} - k_{KD} \cdot D^2 \\ \frac{dD}{dt} = k_{DG} \cdot G^2 - k_{DD} e^{-\omega D + \omega_1} \cdot D \cdot \mathcal{P} - k_{DK} \cdot K^2 \end{cases} \quad (1)$$

4.2. Исследование системы. Проверка на наличие бифуркации

Для исследования полученной системы воспользуемся алгоритмом исследования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (на наличие бифуркаций и анализа устойчивости), приведенным в книге Б.Хэссарда [18, с.63-65].

Исследуем систему (1) при помощи теоремы Андронова-Хопфа¹⁵.

В качестве параметра μ у нас выступает *Пассионарное напряжение* ($\mathcal{P}$). Вычислим матрицу Якоби $A(\mathcal{P}) = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j=1, \dots, 4 \right\}$. В нашем случае

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{GG}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1)G + k_{GE} e^{-\mu E + \mu_1} \cdot E + k_{GK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)(K + D)G \\ f_2 &= k_{EG}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1)E - k_{EG} e^{-\eta G + \eta_1} \cdot G - k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)(K + D)E \end{aligned}$$

¹³ «Поддержание нормативного порядка требует ... согласованности с поведенческими ожиданиями» [12, с.106].

¹⁴ Политическая система решает задачи по «эффективному контролю за ... индивидуальной мотивацией членов общества» [15, с.30].

¹⁵ **Теорема.** Пусть $\dot{x} = F(x, \mu)$ n -мерная система дифференциальных уравнений ($x \in R^n$), зависящая от действительного параметра μ , которая допускает аналитическое семейство $x \equiv 0$ состояний равновесия, т.е. $F(0, \mu) = 0$. При $\mu = 0$ матрица $F_x(0, \mu)$ имеет два чисто мнимых собственных значения $\pm i\omega_0$. Пусть $\alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ является продолжением по параметру собственного значения $i\omega_0$ (т.е. $\alpha(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$) и $\alpha'(0) \neq 0$. Остальные $n-2$ собственных чисел имеют строго отрицательные вещественные части. Тогда существуют *периодические* решения $x(t, \mu)$ периода $T(\mu)$. [11, с.85], [18, с.19].

$$\begin{aligned} f_3 &= k_{KG} \cdot (G^2 + E^2) - k_{KK} e^{-\gamma K + \gamma_1} \cdot K \cdot \mathcal{P} - k_{KD} \cdot D^2 \\ f_4 &= k_{DG} \cdot G^2 - k_{DD} e^{-\omega D + \omega_1} \cdot D \cdot \mathcal{P} - k_{DK} \cdot K^2 \end{aligned}$$

и $x = (G, E, K, D)$.

Пусть $k_{GG} = k_{EE}$.

Обозначим $U = (e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1)$. Тогда $A(\mathcal{P}) =$

$$\begin{pmatrix} k_{GG}U + k_{GK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)(K + D) & k_{GE}e^{-\mu E + \mu_1}(1 - \mu E) & k_{GK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)G & k_{GK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_1)G \\ -k_{EG}e^{-\eta G + \eta_1}(1 - \eta G) & k_{GG}U - k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)(K + D) & -k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)E & -k_{EK}(\mathcal{P} - \mathcal{P}_2)E \\ 2k_{KG} \cdot G & 2k_{KG} \cdot E & -k_{KK}\mathcal{P}e^{-\gamma K + \gamma_1}(1 - \gamma K) & -2k_{KD} D \\ 2k_{DG} \cdot G & 0 & -2k_{DK}K & -k_{DD}\mathcal{P}e^{-\omega D + \omega_1}(1 - \omega D) \end{pmatrix}$$

В положении равновесия при $x = 0$:

$$A(\mathcal{P})|_{x=0} = \begin{pmatrix} k_{GG}U & k_{GE}e^{\mu_1} & 0 & 0 \\ -k_{EG}e^{\eta_1} & k_{GG}U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{KK}\mathcal{P}e^{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{DD}\mathcal{P}e^{\omega_1} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы $A(\mathcal{P})$ находим из уравнения:

$$((k_{GG}U - \lambda)^2 + k_{GE}k_{EG}e^{\mu_1}e^{\eta_1})(-k_{KK}\mathcal{P}e^{\gamma_1} - \lambda)(-k_{DD}\mathcal{P}e^{\omega_1} - \lambda) = 0.$$

Они равны $\lambda_{1,2} = k_{GG}U \pm i\sqrt{k_{GE}k_{EG}}\sqrt{e^{\mu_1}e^{\eta_1}}$, $\lambda_3 = -k_{KK}\mathcal{P}e^{\gamma_1}$, $\lambda_4 = -k_{DD}\mathcal{P}e^{\omega_1}$.

Проверим выполнение условий теоремы Андронова-Хопфа.

1) Собственные числа λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены, $Re\lambda_1(\mathcal{P}) = k_{GG}(e^{\delta \mathcal{P} - \delta_1} - 1) = 0$ при $(\delta \mathcal{P} - \delta_1) = 0$. Выберем δ_1 так (предполагается, что δ уже задана), чтобы бифуркация рождения цикла была при определенном уровне параметра $\mathcal{P}$ (обозначим его через $\mathcal{P}_0$). Тогда из равенства $(\delta \mathcal{P}_0 - \delta_1) = 0$ находим, что $\delta_1 = \delta \mathcal{P}_0$.

$$2) Re\lambda_1'(\mathcal{P}_0) = k_{GG}\delta e^{\delta \mathcal{P}_0 - \delta_1} = k_{GG}\delta \neq 0.$$

$$3) Im\lambda_1(\mathcal{P}_0) = \sqrt{k_{GE}k_{EG}}\sqrt{e^{\mu_1}e^{\eta_1}} \neq 0.$$

$$4) Re\lambda_3(\mathcal{P}_0) = -k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1} < 0, Re\lambda_4(\mathcal{P}_0) = -k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1} < 0.$$

Значит, все условия теоремы Андронова-Хопфа выполнены, $\mathcal{P}_0$ — точка бифуркации рождения цикла. Другими словами, при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$ система теряет устойчивость прежнего стационарного равновесия¹⁶, и появляется цикл в развитии общества. Заметим, что, меняя коэффициенты, мы можем устанавливать определенную величину периода.

4.3. Исследование устойчивости системы

Для исследования устойчивости необходимо привести систему (1) к специальному виду так, чтобы матрица $A(\mathcal{P}_0)$ имела вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

¹⁶Закритичность бифуркации (т.е. появление цикла при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$) следует из исследования устойчивости решения (см. далее).

где $\omega_0 = \text{Im} \lambda_1(\mathcal{P}_0) > 0$, D – некоторая матрица. Для этого построим матрицу $L = (\text{Re } v_1, -\text{Im } v_1, r_3, r_4)$, где v_1 – собственный вектор $A(\mathcal{P}_0)$, отвечающий собственному числу $\lambda_1 = i\omega_0$, а r_3, r_4 – любой набор вещественных векторов, образующий базис в объединении всех подпространств, отвечающих собственным числам λ_3, λ_4 при $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$.

В нашем случае

$$A(\mathcal{P}_0) = \begin{pmatrix} 0 & k_{GE}e^{\mu_1} & 0 & 0 \\ -k_{EG}e^{\eta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1} \end{pmatrix},$$

$$\omega_0 = \sqrt{k_{GE}k_{EG}}\sqrt{e^{\mu_1}e^{\eta_1}}, \quad v_1 = (1, i\sqrt{\frac{k_{EG}}{k_{GE}}}\sqrt{\frac{e^{\eta_1}}{e^{\mu_1}}}, 1, 1),$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{k_{EG}}{k_{GE}}}\sqrt{\frac{e^{\eta_1}}{e^{\mu_1}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведем замену переменных $x = Ly$ и обозначим через $\dot{y} = F(y)$ полученную систему уравнений в переменных y . Пусть $B = \sqrt{k_{GE}k_{EG}}\sqrt{e^{\mu_1}e^{\eta_1}}$ и $c = \sqrt{\frac{k_{EG}}{k_{GE}}}\sqrt{\frac{e^{\eta_1}}{e^{\mu_1}}}$.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = k_{GG}(e^{\delta\mathcal{P}-\delta_1}-1)y_1 - Be^{\mu cy_2}y_2 + k_{GK}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_1)(y_3+y_4)y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = k_{GG}(e^{\delta\mathcal{P}-\delta_1}-1)y_2 + Be^{-\eta y_1}y_1 - k_{EK}(\mathcal{P}-\mathcal{P}_2)(y_3+y_4)y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = k_{KG} \cdot (y_1^2 + c^2 y_2^2) - k_{KK} e^{-\gamma y_3 + \gamma_1} \cdot y_3 \cdot \mathcal{P} - k_{KD} \cdot y_4^2 \\ \frac{dy_4}{dt} = k_{DG} \cdot y_1^2 - k_{DD} e^{-\omega y_4 + \omega_1} \cdot y_4 \cdot \mathcal{P} - k_{DK} \cdot y_3^2 \end{cases} \quad (2)$$

Тогда $A(\mathcal{P})$ имеет требуемый вид

$$\begin{pmatrix} k_{GG}U & -B & 0 & 0 \\ B & k_{GG}U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{KK}\mathcal{P}e^{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{DD}\mathcal{P}e^{\omega_1} \end{pmatrix},$$

$$A(\mathcal{P}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -B & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1} \end{pmatrix}.$$

Далее, проведя вычисления частных производных второго и третьего порядка по формулам, приведенным в [18, с.64-65], находим величину $c_1(0) = (i/2\omega_0)(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + g_{21}/2$.

Здесь

$$g_{20}g_{11} = -\frac{4B^2\mu^2c^2 + 4B^2\eta^2}{16},$$

$$|g_{11}|^2 = |g_{02}|^2 = \frac{4B^2\mu^2c^2 + 4B^2\eta^2}{16},$$

$$g_{21} = \frac{i(3B\eta^2 + 3B\mu^2c^2)}{8} + \frac{Mk_{KG}(1 + c^2)}{k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1}} + \frac{Mk_{DG}}{k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1}} +$$

$$+ \frac{Nk_{KG}(1 - c^2)(k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1} - 2iB)}{2(k_{KK}^2\mathcal{P}_0^2e^{2\gamma_1} + 4B^2)} + \frac{Nk_{DG}(k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1} - 2iB)}{2(k_{DD}^2\mathcal{P}_0^2e^{2\omega_1} + 4B^2)},$$

где

$$M = \frac{k_{GK}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1) - k_{EK}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_2)}{2}, N = \frac{k_{GK}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1) + k_{EK}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_2)}{2}.$$

Устойчивость периодического решения определяется знаком коэффициента $\beta_2 = 2\operatorname{Re} c_1(0)$ (устойчиво при $\beta_2 < 0$ и неустойчиво при $\beta_2 > 0$). Закритичность бифуркации (т.е. появление периодического решения при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$) показывает знак величины $\mu_2 = -\operatorname{Re} c_1(0)/\operatorname{Re} \lambda'_1(\mathcal{P}_0)$ (бифуркация закритична при $\mu_2 > 0$).

В нашем случае

$$\operatorname{Re} c_1(0) = \frac{Mk_{KG}(1 + c^2)}{2k_{KK}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1}} + \frac{Mk_{DG}}{2k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1}} +$$

$$+ \frac{Nk_{KK}k_{KG}\mathcal{P}_0e^{\gamma_1}(1 - c^2)}{4(k_{KK}^2\mathcal{P}_0^2e^{2\gamma_1} + 4B^2)} + \frac{Nk_{DG}k_{DD}\mathcal{P}_0e^{\omega_1}}{4(k_{DD}^2\mathcal{P}_0^2e^{2\omega_1} + 4B^2)},$$

$$\operatorname{Re} \lambda'_1(\mathcal{P}_0) = k_{GG}\delta > 0.$$

Следовательно, решение системы (1) имеет закритическую бифуркацию и устойчиво при $\operatorname{Re} c_1(0) < 0$.

Пусть

$$\mathcal{P}_0 \geq \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2; \quad k_{GK} \leq k_{EK}; \quad (3)$$

$$k_{KK} = k_{DD}; \quad \gamma_1 = \omega_1; \quad (4)$$

$$k_{KG}(1 - \frac{k_{EG}}{k_{GE}} \frac{e^{\eta_1}}{e^{\mu_1}}) + k_{DG} < 0. \quad (5)$$

Тогда $M \leq 0$ и $\operatorname{Re} c_1(0) < 0$.

Таким образом, мы получили условия ((3),(4) и (5)) на коэффициенты исследуемых уравнений, при которых решение будет **устойчиво**.

4.4. Компьютерное моделирование

При проведении численного исследования параметр $\mathcal{P}$ (*Пассионарное напряжение*) берем из модели этногенеза¹⁷ (см. рис. 1). В качестве $\mathcal{P}_0$ берем такое

¹⁷При компьютерном моделировании использован пакет программ *МЭР*, созданный В.Коробицыным [5].

значение *Пассионарного напряжения* этноса так, чтобы со временем параметр не становился меньше P_0 .

В результате мы получили график решения¹⁸ системы (1) (см. рис. 1).

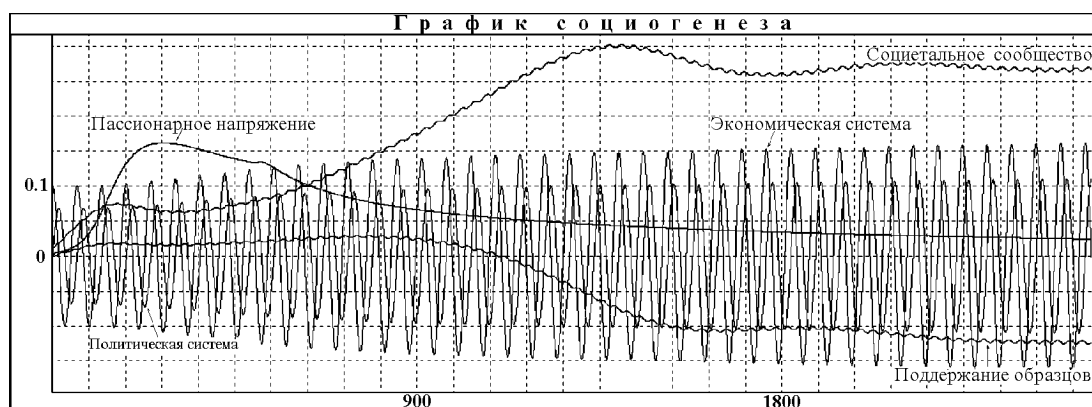


Рис.1

4.5. Устойчивость социальной системы

Предсказание эволюции общества – это лишь предсказание состояния, в котором *может* пребывать общество. В нашем случае мы предсказываем, решая систему дифференциальных уравнений. В какой мере можно утверждать, что социальная система поведет себя именно так, а не иначе? Строя и исследуя модель, мы изолировались от внешних воздействий и фиксировали некоторое начальное состояние, которое, в принципе, нельзя точно получить. Здесь изначально закладываются неточности и погрешности. Значит, необходимо установить, насколько близки к одному предсказанию эволюционной траектории другие возможные эволюционные траектории, которые получаются либо при закладывании несколько иных, но близких, начальных данных, либо при учете внешних воздействий на социальную систему [3, с.141]. Также необходимо выяснить возможность изменения коэффициентов при исследовании модели, то есть посмотреть, устойчива система или нет. «Саму эволюционную траекторию можно рассматривать как *равновесие*. Переход от одной эволюционной траектории к другой – это смена равновесий. Непредсказуемая смена равновесий – это бифуркация (или катастрофа). Интуитивно ясно, что социальная система, если уж и подвергнется бифуркации, то, «побродив» исторически короткий отрезок времени, рано или поздно окажется в устойчивом равновесии» [3, с.142]. Здесь стоит отметить свойство эквифинальности, выдвинутое австрийским биологом-теоретиком Л.Берталанфи, которое «выражает способность достигать конечного состояния системы независимо от нарушений в определенных пределах ее начальных условий» [7, с.142].

¹⁸Коэффициенты: $k_{GG} = 0.05, k_{GE} = 0.07, k_{GK} = 0.01; k_{EE} = 0.05, k_{EG} = 0.15, k_{EK} = 0.01; k_{KG} = 0.08, k_{KK} = 0.07, k_{KD} = 0.07; k_{DG} = 0.08, k_{DD} = 0.07, k_{DK} = 0.01; \delta = 0.1, \delta_1 = 0.001; \mu = 0.01, \mu_1 = 0.01; \eta = 0.01, \eta_1 = 0.01; \gamma = 0.1, \gamma_1 = 0.01; \omega = 0.1, \omega_1 = 0.01; P_0 = 0.011, P_1 = 0.01, P_2 = 0.01; G|_{t=0} = 0, E|_{t=0} = 0.1, K|_{t=0} = 0.01, D|_{t=0} = 0$. Условия (3)-(5) выполнены.

Необходимо отметить, что вопросу о стабильности (устойчивости) общества уделяется большое внимание в социологии. Так, например, Парсонс пишет, что «термин «стабильность» эквивалентен более специфическому понятию стабильного равновесия, которое в другом отнесении может быть как статичным, так и подвижным. Система стабильна или находится в относительном равновесии, если отношение между ее структурой и процессами, протекающими внутри нее, и между ней и окружением таково, что свойства и отношения ... оказываются неизменными» [13, с.465]. Также Т.Парсонс говорит о требовании наивысшей степени автономности общества среди других социальных систем, которые могут реализовывать различные социальные образования в разные исторические периоды [15, с.30].

При исследовании системы (1) мы установили (см п.3.3), что появляется цикл в развитии общества и что новое циклическое состояние общественного равновесия устойчиво (при определенных условиях на коэффициенты).

Для проверки устойчивости с помощью компьютерного моделирования будем изменять коэффициенты и начальные данные и посмотрим, как изменится вид графика решения. На рис 2. изображено решение системы (1) в уменьшенном масштабе (относительно рис.1).

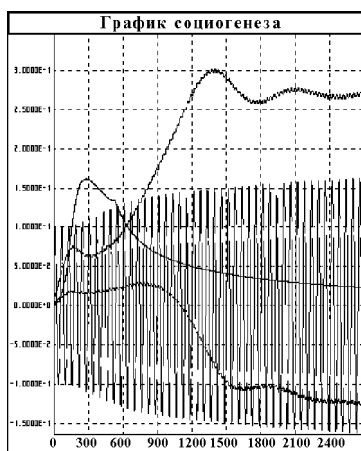


Рис. 2

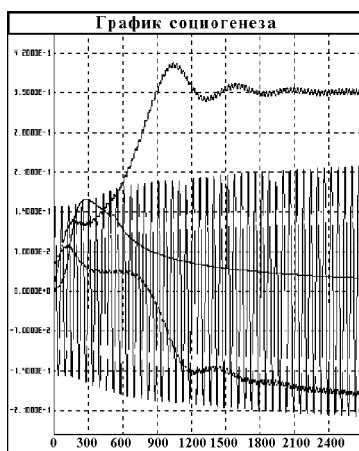


Рис. 3

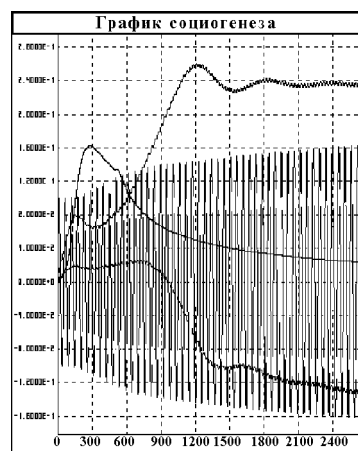


Рис. 4

Сначала «пошевелим» начальные данные¹⁹ на небольшую величину. Видно, что общий вид решения практически не изменился (рис.3). Следовательно, можно сделать вывод, что мы можем менять начальные условия достаточно свободно.

Изменив коэффициенты²⁰ правой части системы (1), мы получили график, изображенный на рис.4. Решение ведет себя точно так же, как и решение исходной системы. Этот результат говорит, что решение устойчиво относительно возмущений правой части. Это дает возможность достаточно произвольно выбирать коэффициенты и при этом получать разные модели социальных систем.

¹⁹ $G|_{t=0}=0, E|_{t=0}=0.15, K|_{t=0}=0.015, D|_{t=0}=0.05$

²⁰ $k_{GG}=0.055, k_{GE}=0.075, k_{GK}=0.015; k_{EE}=0.055, k_{EG}=0.155, k_{EK}=0.015; k_{KG}=0.085, k_{KK}=0.075, k_{KD}=0.075; k_{DG}=0.085, k_{DD}=0.075, k_{DK}=0.015; \delta=0.1, \delta_1=0.001; \mu=0.01, \mu_1=0.01; \eta=0.01, \eta_1=0.01; \gamma=0.1, \gamma_1=0.01; \omega=0.1, \omega_1=0.01; P_0=0.011, P_1=0.01, P_2=0.01; G|_{t=0}=0, E|_{t=0}=0.1, K|_{t=0}=0.01, D|_{t=0}=0. Условия (3)-(5) выполнены.$

5. Заключение

В работе исследована теория общества американского социолога Т.Парсонса. Исходя из нее, построена система из 4-х дифференциальных уравнений, описывающих социальную систему. Система исследована на наличие бифуркации и устойчивости. Выяснено, что система имеет периодическое решение при определенных значениях параметра (пассионарного напряжения этноса), которое устойчиво при некоторых условиях на коэффициенты. Компьютерное моделирование показало, что решение периодическое и устойчивое. Полученные результаты согласуются с социологической теорией.

При построении математической модели социогенеза и проведении ее компьютерного моделирования мы исходили из теории Т.Парсонса и теории циклического развития экономической и политической систем общества, сделанных Н.Кондратьевым [8], Ю.Яковцом [19] и др. Для доказательства работоспособности предложенной математической модели социогенеза исследовали характер полученных кривых $K(t)$, $D(t)$, $G(t)$, $E(t)$. Но с чем их сравнить? В случае этногенеза А.К.Гуц сравнивал с «экспериментальными кривыми». В нашем случае таких кривых нет.

Социальная система не статична, а постоянно в движении, то есть, достигнув некоторого уровня, кривые периодически колеблются около этого уровня с постоянной амплитудой. Из рис.2 видно, что социальная система через некоторое время приходит к равновесию. Начальные данные мы задаем произвольно (близкими к нулю, т.к. в начале эволюции все подсистемы еще не развиты). Нуль по оси ординат можно считать относительным понятием, просто он задает некоторый уровень, время (в годах) по оси абсцисс также относительно. Характерный рост (до стабилизации) графика *социетального сообщества* объясняется тем, что в начале развития нормы и ценности только укореняются в сознании людей, а потом, когда в обществе устанавливаются абсолютные ценности и нормы, их трудно изменить. Падение уровня системы *поддержания институциональных образцов* обусловлено ослаблением коллективного сознания общества в процессе раскрепощения индивидуальных сознаний членов общества. *Экономическая и политическая системы* предопределены начальными данными и колеблются возле первоначального уровня (амплитуда изменения политической системы несколько меньше, чем у экономической системы).

Таким образом, в результате построения получилась простейшая модель социальных процессов с устойчивым периодическим решением. Считаем, что данный подход на современном уровне исследований имеет право на существование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумилев Л.Н. *Этногенез и биосфера Земли*. – М.: «Мишель и К⁰», 1993.
2. Гумилев Л.Н. *География этноса в исторический период*. // Звезда. – 1990. – N2.
3. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология: Учебное пособие*. – Омск: ОмГУ, 1997.

4. Гуц А.К., Лаптев А.А. *Рождение циклов в развитии политической и экономической систем вследствие ослабления режимов власти* // Циклы природы и общества. – Ставрополь, 1996.
5. Гуц А.К., Коробицын В.В. *Компьютерное моделирование этногенетических процессов*. – Деп. в ВИНТИ 24.09.97, N2903 – В97. – 23 с.
6. Дюркгейм Э. *О разделении общественного труда. Метод социологии*. – М.: Наука, 1991.
7. Капитонов Э.А. *Социология XX века*. – Ростов-на-Дону, 1996.
8. Кондратьев Н.Д. *Избранные сочинения*. – М.: Экономика, 1993.
9. Крапивин В.Ф., Свирижев Ю.М., Тарко А.М. *Математическое моделирование глобальных биосферных процессов*. – М.: Наука, 1982.
10. Лаптев А.А. *Математическое моделирование этносоциальных процессов*. – Деп. в ВИНТИ 24.09.97, N2904–В97. – 26 с.
11. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. – М.: Мир, 1983.
12. Парсонс Т. *Понятие общества: компоненты и их взаимоотношения* // Тезис. – Т.1. – N.2. – С.94–122.
13. Парсонс Т. *Функциональная теория изменения* // Американская социологическая мысль. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – С.464–480.
14. Парсонс Т. *Система координат действия и общая теория систем действия: культура, личность и место социальных систем* // Американская социологическая мысль. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – С.448–464.
15. Посконин В.В. *Социально-политическая теория Т.Парсонса: методологический аспект*. – Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1994.
16. Посконин В.В. *Правопонимание Толкотта Парсонса*. – Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995.
17. Смелзер Н. *Социология*. – М.: Феникс, 1994.
18. Хэссард Б. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*. – М.: Мир, 1985.
19. Яковец Ю.В. *История цивилизаций*. – М.: ВлаДар, 1995.