

-
40. Оболенский А.Ю. *Об устойчивости решений автономных систем Важевского с запаздыванием* // Укр. матем. журн. 1983. Т.35. N 5. С.574-579.
 41. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*. – М.: Мир, 1984.
 42. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. – М.: Наука, 1971.
 43. Чертков И.Л. *Родоначальная клетка кроветворной системы* // Нормальное кроветворение и его регуляция / Под ред. Н.А. Федорова. – М.: Медицина, 1976. С.40-97.
 44. Козлов В.А. *Скорость клеточного цикла и проблема дифференцировки стволовой кроветворной клетки (ПСКК)* // Научный отчет. – Новосибирск: Институт клинической иммунологии СО РАМН, 1996. С.29-30.
 45. Гаврилов О.К. *История развития теории кроветворения и современная схема гемопоэза* // Нормальное кроветворение и его регуляция / Под ред. Н.А. Федорова. – М.: Медицина, 1976. С.33-38.
 46. Schofield R. *The relationship between the spleen colony forming cell and hemopoietic stem cell. A hypothesis* // Blood cells. 1978. V.4. P.7-25.
 47. Lord B.I. *The architecture of bone marrow cell populations* // Int. J. Cell Cloning. 1990. V.8. P.317-331.
 48. Чеглякова В.В., Цырлова И.Г., Козлов В.А. *Эритроидной природы естественные супрессорные клетки костного мозга* // Иммунология. 1989. N 3. С.52-55.
 49. Цырлова И.Г. *Регуляция пролиферации и дифференцировки гемопоэтических стволовых клеток (КОЕс) при антигенном воздействии* // Онтогенез. 1991. Т.22. С.152-158.

ПЕРЕНОС ЗАВИХРЕННОСТИ: ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

А.С. Толстуха

Algorithm of the calculation of the steady fluid flow with vorticity through three dimensional channel is presented. The velocity field is decomposed in terms of potential and vortex-induced parts. Vorticity transport calculation is based on the approximate calculation of the stream line and the time scale functions of the flow particles.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача о стационарном течении идеальной жидкости в пространственном канале.

В пространственной области Ω , ограниченной границами типа T – стенка, Γ_0 – граница втекания жидкости в область, Γ_1 – граница вытекания, требуется найти вектор-функции

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))^T,$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(\mathbf{x}) = (\omega_1(\mathbf{x}), \omega_2(\mathbf{x}), \omega_3(\mathbf{x}))^T$$

и скалярную функцию

$$p = p(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \Omega$; $\mathbf{u}$ – скорость в точке $\mathbf{x}$; $\vec{\omega}$ – завихренность; $\vec{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$; p – давление, удовлетворяющие уравнениям

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$\Delta p = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in T \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = U_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (6)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \cup T \cup \Gamma_1. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – внешняя к области нормаль в точке границы $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $U_1 = U_1(\mathbf{x})$ – заданные на соответствующих границах функции с условием совместности

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_1} U_1 dS = 0,$$

причем считаем $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \leq \epsilon < 0$ в каждой точке границы Γ_0 . Для однозначности в определении давления потребуем выполнения условия

$$\int_{\Omega} p d\mathbf{x} = 0. \quad (8)$$

Первое из уравнений (1)-(3) есть уравнение сохранения массы, второе – уравнение переноса завихренности, третье определяет поле давлений; (2) и (3) являются следствием уравнения сохранения импульса. Вместе они эквивалентны уравнениям Эйлера для идеальной жидкости. Существование и единственность решения задачи протекания завихренной жидкости через замкнутую пространственную область установлены (см. [1]).

Далее полагаем, что Γ_0 лежит в плоскости $x_3 = 0$; внешняя нормаль есть $\mathbf{n} = (0, 0, -1)^T$ и, следовательно, $u_{03}(\mathbf{x}) \geq \epsilon > 0$.

2. Метод решения

Для решения предлагается итерационная процедура. Начальное приближение поля скорости взять в виде:

$$\mathbf{u}^{(0)} = \nabla \phi,$$

где $\phi = \phi(\mathbf{x})$ – потенциал скоростей, являющийся решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in T \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= -u_{03}, & \mathbf{x} \in \Gamma_0 \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{n} &= U_1, & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \phi d\mathbf{x} = 0.$$

Пусть имеется k -ое приближение поля скорости $\mathbf{u}^{(k)}$, удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям (4)-(6). Тогда:

1) Решить задачу определения поля давлений $p^{(k)}$, удовлетворяющего ref3, (7), (8).

2) Найти компоненты вихря $\vec{\omega}_0$ на поверхности втекания. Вместе с

$$\omega_{03} = \frac{\partial u_{02}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{01}}{\partial x_2}$$

из уравнения импульсов в форме Громеки-Лэмба получим

$$\omega_{01} = \frac{1}{u_{03}} \left(u_{01}\omega_{03} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(p^{(k)} + \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0}{2} \right) \right)$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{u_{03}} \left(u_{02}\omega_{03} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(p^{(k)} + \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0}{2} \right) \right)$$

3) Найти вектор-функцию $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = (X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}), X_3(\mathbf{x}))^T$ такую, что

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^{(k)} \cdot \nabla) \mathbf{X} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}_0 \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (10)$$

постоянную на линиях тока

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}_0 \in \Gamma_0 \end{cases}$$

В силу выбора поверхности Γ_0 имеем $X_3(\mathbf{x}) = 0$.

Найти функцию $\Theta(\mathbf{x})$ – время, затраченное частицей с момента вхождения в область до попадания в точку $\mathbf{x}$.

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k)} \cdot \nabla \Theta = 1, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \Theta(\mathbf{x}_0) = 0, & \mathbf{x}_0 \in \Gamma_0 \end{cases} \quad (11)$$

4) По функциям $\mathbf{X}(\mathbf{x})$, $\Theta(\mathbf{x})$ получить матрицу J преобразования координат при движении частицы вдоль линии тока.

$$J = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) (\nabla \Theta)^T. \quad (12)$$

Действительно, рассмотрим линию тока AB из точки $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_0$ в точку $\mathbf{x}$ и малое приращение $\Delta \mathbf{x}$ (см. рис. 1). Нужно вычислить $\Delta \mathbf{y}$ – приращение к $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ такое, чтобы время, затраченное частицей на путь из точки $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{y}$ (обозначим её литерой C) в точку $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ (обозначим D), в первом приближении совпало со временем t_{AB} , затраченное частицей на путь из точки $\mathbf{x}_0$ в точку $\mathbf{x}$. Отметим на линии тока, проходящей через точки C , D , точку A' , лежащую на границе и равную $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{X}(\mathbf{x}')$, а также точки C' и D' , полученные из точек A , B приращениями, ортогональными к вектору скорости в этих точках. Заметим, что время, затраченное частицей на путь из точки C' в точку D' совпадает с t_{AB} и, следовательно, $t_{CC'} = t_{DD'} = \Delta t$. Имеем

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x}_0 + \Delta t_0 \mathbf{u}(\mathbf{x}'_0) + \Delta t \mathbf{u}(\mathbf{x}'_0 + \Delta t_0 \mathbf{u}(\mathbf{x}'_0)),$$

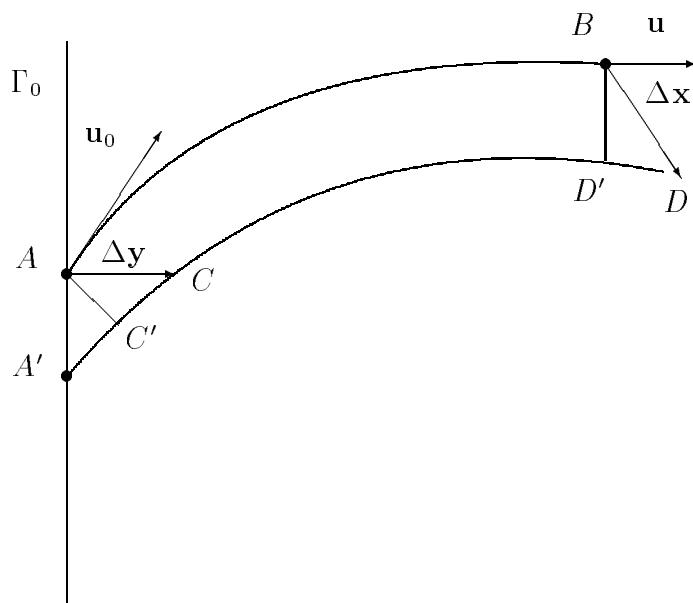


Рис. 1

где $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$, $\Delta t_0 = t_{A'C'}$. В первом приближении

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{x}_0 + (\Delta t_0 + \Delta t) \mathbf{u}_0,$$

где $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$. Так как время нахождения частиц в области известно, в первом приближении получим:

$$\Delta t_0 + \Delta t = \Theta(\mathbf{x}') - \Theta(\mathbf{x}) = \nabla \Theta \cdot \Delta \mathbf{x}.$$

Вычисляя пределы в направлениях x_j

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{e}_j)}{\alpha} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{e}_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})^T$$

получим (12).

5) Найти приближение поля завихренности по формуле (см. [2])

$$J \vec{\omega} = \vec{\omega}_0(\mathbf{X}). \quad (13)$$

6) Индуцированную завихренностью скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ найти как значение интеграла (см. [3])

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\xi} \in \mathbf{R}^3} \frac{\vec{\omega}(\vec{\xi}) \times (\mathbf{x} - \vec{\xi})}{|\mathbf{x} - \vec{\xi}|^3} d\vec{\xi}.$$

7) Следующее, $(k+1)$ -ое приближение поля скорости есть сумма

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \nabla \phi + \mathbf{v},$$

где $\phi = \phi(\mathbf{x})$ – потенциал, являющийся решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), & \mathbf{x} \in T \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= -u_{03} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), & \mathbf{x} \in \Gamma_0 \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= U_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \phi d\mathbf{x} = 0.$$

3. Численная реализация

Для решения используется метод конечных элементов. Область Ω разбивается на четырехузловые элементы – тетраэдры. Вершины тетраэдров при этом образуют узлы разбиения с координатами $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, N$ (N – количество узлов). На этом разбиении определяются финитные базисные функции таким образом, что если $V_i(\mathbf{x})$ – базисная функция, связанная с узлом i , то в любом элементе она линейна и $V_i(\mathbf{x}_i) = 1$, $V_i(\mathbf{x}_j) = 0$, при $j \neq i$.

Метод численного решения задачи Неймана для уравнения Пуассона, с линейными базисными функциями изложен, например, в [4]. К таковым относятся: задача нахождения начального приближения (9), задача на давление пункта 1), перехода к следующему приближению поля скорости пункта 7) итерационной процедуры.

Решение задачи определения линий тока (10) ищем в виде

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i V_i(\mathbf{x})$$

методом наименьших квадратов. Пусть $X(\mathbf{x})$ – компонента вектор-функции $\mathbf{X}(\mathbf{x})$. Требуется найти коэффициенты X_i , $i = 1, \dots, N$ обеспечивающие минимум функционалу

$$\Phi(X_1, \dots, X_N) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla X)^2 d\mathbf{x}$$

Условие минимума квадратичного функционала

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Полагая $\mathbf{u}$ кусочно-линейной на конечноэлементном разбиении функцией, получим

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} X_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

$$a_{ij} = \sum_{T \ni i,j} \left(\frac{4}{5} (\mathbf{u}_T \cdot \nabla V_{iT}) (\mathbf{u}_T \cdot \nabla V_{jT}) + \frac{1}{20} \sum_{k \in T} (\mathbf{u}_k \cdot \nabla V_{iT}) (\mathbf{u}_k \cdot \nabla V_{jT}) \right) Vol_T,$$

где суммирование осуществляется по тетраэдрам, содержащим в качестве вершин узлы с номерами i, j ; Vol_T – объем тетраэдра; $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{u}_T = (\sum_{k \in T} \mathbf{u}_k)/4$.

Так как на границе Γ_0 значения $X(\mathbf{x})$ известны, система (15) редуцируется к виду

$$\sum_{j \in \{1, \dots, N | \mathbf{x}_j \notin \Gamma_0\}} a_{ij} X_j = - \sum_{j \in \{1, \dots, N | \mathbf{x}_j \in \Gamma_0\}} a_{ij} X_j, \quad i \in \{1, \dots, N | \mathbf{x}_i \notin \Gamma_0\}.$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей может быть получено численно.

Решение задачи определения временной шкалы для частиц (11) строится аналогично. Матрица системы совпадает с матрицей задачи на линии тока, несколько иная правая часть.

$$\sum_{j \in \{1, \dots, N | \mathbf{x}_j \notin \Gamma_0\}} a_{ij} \Theta_j = b_i, \quad i \in \{1, \dots, N | \mathbf{x}_i \notin \Gamma_0\}$$

$$b_i = \sum_{T \ni i} (\mathbf{u}_T \cdot \nabla V_{iT}) Vol_T.$$

Вычисление поля завихренности – шаги 4), 5) – производится в каждом тетраэдре. Заметим, что так как функции $\mathbf{X}(\mathbf{x})$, $\Theta(\mathbf{x})$ получены *в среднем*, локальное вычисление J_T и, следовательно, $\vec{\omega}_T$ происходит с ошибкой, что влечёт за собой неточное выполнение условия $\text{div } \vec{\omega} = 0$. Более последовательный подход заключается в требовании выполнения условия (13) *в среднем*, но он приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей, имеющей размеры $3N \times 3N$.

При расчете индуцированной завихренностью скорости практически применялась формула

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\{T | |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_T| < r\}} \frac{\vec{\omega}_T \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_T)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_T|^3} Vol_T, \quad i = 1, \dots, N$$

с некоторым r , $\mathbf{x}_T = (\sum_{k \in T} \mathbf{x}_k)/4$.

Чтобы обеспечить выполнение условия (1) очередным приближением поля скорости, ведущее уравнение задачи (14) шага 7) нужно заменить на

$$\Delta \phi = -\text{div } \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

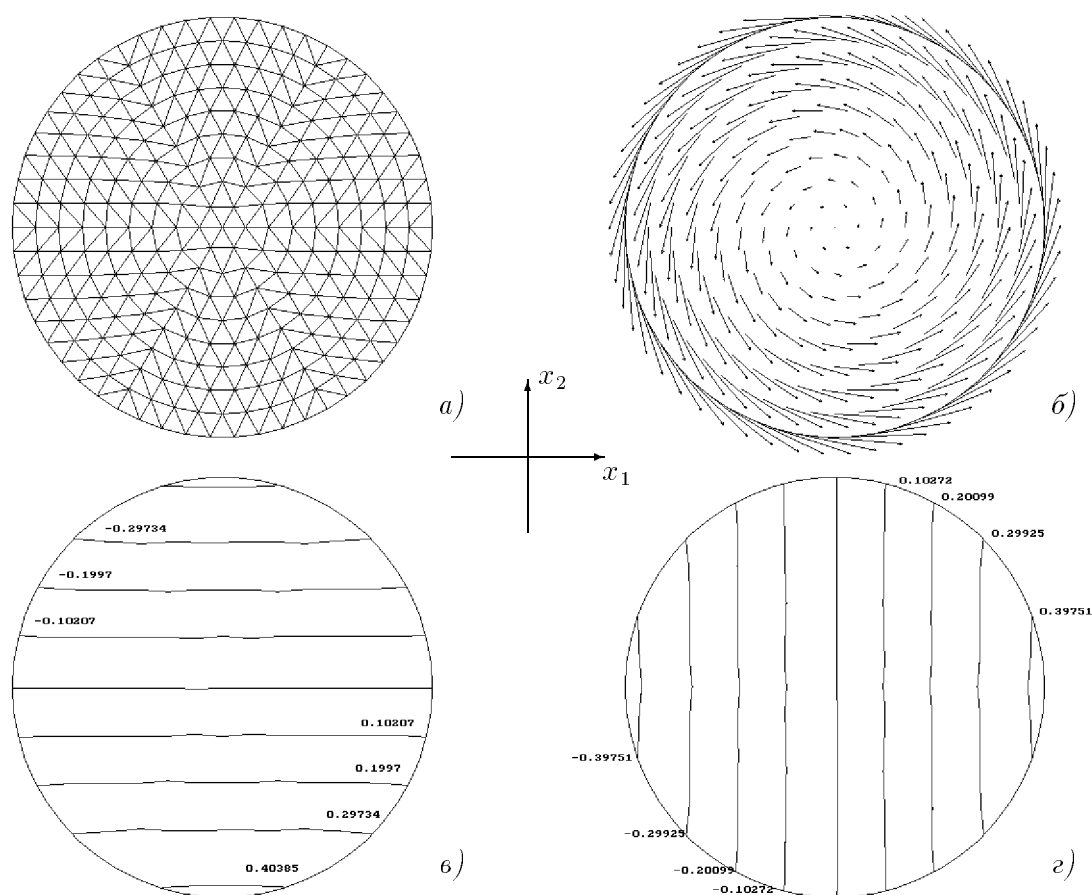


Рис. 2

4. Пример расчета

Область – труба радиуса 1, длиной 3. Скорость на входе

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (-x_2/2, x_1/2, 1)^T, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0$$

нормальная составляющая на выходе

$$U_1(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Точное решение:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (-x_2/2, x_1/2, 1)^T, \quad \vec{\omega}(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

представляет течение жидкости с постоянной скоростью вдоль оси x_3 , вращающейся вокруг неё как твёрдое тело.

На рис. 2 изображены результаты расчета в среднем сечении трубы: а) расчетная сетка; б) вид поля скорости в проекции на плоскость (x_1, x_2) ; в) линии уровней функции u_1 ; г) линии уровней функции u_2 .

Таким образом, построен и реализован на основе метода конечных элементов итерационный алгоритм, решающий нелинейную задачу расчета вихревого