Вторая проблема – это поиск приемлемых моделей для описанной выше теории.

В силу того, что аксиома Ловера-Кока не удовлетворяет закону исключенного третьего, то из этого списка выпадает категория Set. В то же время хорошо описан класс моделей, удовлетворяющих приведенным в начале статьи условиям [1, 4]. В него входят: категория (топос) $Set^{F^{op}}$, здесь F-категория замкнутых идеалов гладких колец (т.е. колец вида $C^{\infty}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, где R – поле вещественных чисел), категория $Set^{G^{op}}$ идеалов, «определяемых ростком» (germ-determined), гладкий топос Зарисского – полный аналог топоса Зарисского из алгебраической геометрии, который классифицирует локальные k-алгебры (в данном случае C^{∞}-кольца), топос Базеля (Basel topos). Последние два примера являются моделями с обратимыми инфинитозималами.

Подробнее об этих и других моделях можно прочесть в [1, 4].

Литература

1. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* – Cambridge University Press, 1981.

2. Kock A. *Combinatorics of curvature, and Bianchi Identity* // Theory and Applications of Categories 2. 1996. N 7. P.69-89.

3. Kock A. *Geometric Construction of the Levi - Civita Parallelism.*

4. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* – Springer Verlag, 1991.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 2, с.39-50.

УДК 519.1

СМЕЖНОСТЬ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА K-ФАКТОРОВ

Р.Ю.Симанчёв

In this paper the criterion of adjacency of the vertices one of the polyhedral relaxations of k-factors polytope was received. The particularity given criterion is that it is worded in graph terms. Received criterion gives sufficient conditions of adjacency of vertices corresponding integer polytope.

В ряде алгоритмов комбинаторной оптимизации широко используется информация о полиэдральной структуре выпуклых оболочек допустимых решений рассматриваемых задач. Широкий класс образуют экстремальные задачи в следующей постановке. Пусть E – конечное множество, $c : E \to R$ – аддитивный функционал на E, $\Im \subseteq 2^E$ – некоторое семейство подмножеств множества E. Требуется найти такой $H^* \in \Im$, что $c(H^*) \geq c(H)$ для любого $H \in \Im$. Полиэдральный подход к анализу и решению такой задачи заключается в сопоставлении этой задаче специального $(0,1)$-многогранника и использовании полиэдральных и комбинаторных свойств последнего. Множеству E сопоставим евклидово пространство R^E, имея в виду взаимнооднозначное соответствие между E и множеством координатных осей пространства R^E, для любого $F \in 2^E$ определим его *вектор инциденций* $x^F \in R^E$ как вектор-столбец с компонентами $x^F_e = 1$ при $e \in F$, $x^F_e = 0$ при $e \notin F$. Таким образом, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между 2^E и множеством вершин единичного куба в R^E. Теперь положим

$$P(\Im) = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \Im\}.$$

В силу аддитивности функционал $c : E \to R$ естественным образом ассоциируется с линейным функционалом $f_c : R^E \to R$, причем $c(F) = f_c(x^F)$ для любого $F \subseteq E$.

Как уже говорилось, полиэдральная структура многогранника $P(\Im)$ играет существенную роль при разработке алгоритмов решения задачи. Например, полное или частичное линейное описание многогранника $P(\Im)$ позволяет применять для решения задачи аппарат линейного и целочисленного линейного

© **1998 Р.Ю. Симанчёв**
E-mail: siman@univer.omsk.su
Омский государственный университет

программирования [5]; диаметр $P(\Im)$ может служить оценкой числа итераций «наилучшей» симплексной процедуры [5]; классы смежных вершин [1, 2] весьма полезны при разработке алгоритмов локальной оптимизации и решении задачи идентификации правильных неравенств [4].

Один из подходов к выделению смежных вершин многогранника $P(\Im)$ заключается в следующем. Условимся через $vertM$ обозначать множество всех вершин многогранного множества M. Пусть $M(\Im)$ – некоторая релаксация многогранника $P(\Im)$, т.е. $P(\Im) \subseteq M(\Im)$. Релаксацию $M(\Im)$ будем называть *полиэдральной* , если $M(\Im) = \{x \in R^E \mid Ax \leq b\}$, где A – $(n\times \mid E \mid)$-матрица, b – n-вектор. Если $M(\Im)$ – многогранное множество и $x^1, x^2 \in (vertP(\Im)) \cap (vertM(\Im))$ смежны в $M(\Im)$, то они, очевидно, смежны и в $P(\Im)$. В случае, когда релаксация $M(\Im)$ полиэдральная, вопрос о смежности точек $x^1, x^2 \in vertM(\Im)$ можно анализировать на основе подматрицы общих для x^1 и x^2 линейных ограничений. Однако при достаточно большом $\mid E \mid$ вычисление ранга соответствующей подматрицы затруднительно и поэтому имеет смысл поиск комбинаторных критериев смежности вершин релаксации $M(\Im)$. В настоящей статье этот подход применяется к многограннику k-факторов полного графа.

Нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Пусть R^d – d-мерное вещественное пространство. *Аффинной комбинацией* векторов (точек) $x^1, \ldots, x^t$ пространства R^d называется всякий вектор $x = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i x^i$, удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1$. Если к этому добавлено условие $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots t$, то вектор x называется *выпуклой комбинацией* векторов $x^1, \ldots, x^t$. *Выпуклой оболочкой* произвольного множества $S \subset R^E$ называется множество $convS$, состоящее из всевозможных выпуклых комбинаций точек множества S; *аффинной оболочкой* – $affS$ – называется множество всевозможных аффинных комбинаций точек множества S. Семейство векторов $x^1, \ldots, x^t$ пространства R^E будем называть *аффинно независимым*, если ни один из этих векторов не является аффинной комбинацией остальных. Под *размерностью* выпуклого множества $S \subset R^E$ – $dimS$ – будем понимать мощность максимального аффинно независимого семейства его точек минус 1.

Выпуклым многогранником (или просто *многогранником*) в пространстве R^d называется выпуклая оболочка конечного множества точек этого пространства. Мы определим *полиэдр* в d-мерном вещественном пространстве как множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств относительно d переменных, если оно ограничено. Согласно теореме Вейля-Минковского, для всякого выпуклого многогранника P сушествует такой полиэдр F, что $P = F$. Верно и обратное: всякий полиэдр является многогранником.

Гранью многогранника P называется множество $\{x \in P \mid a^T x = a_0\}$, где $a^T x \leq a_0$ – опорное к P неравенство. Грань называется *p-гранью*, если ее размерность равна p, 0-грани называются *вершинами*, 1-грани – *ребрами* многогранника P. Две вершины *смежны* в P, если они принадлежат одному ребру многогранника P. Ясно, что если P – полиэдр, то 1) $x \in P$ является вершиной тогда и только тогда, когда ранг подматрицы ограничений, обращаемых

точкой x в равенство, равен d; 2) две вершины $x^1, x^2 \in P$ смежны в P тогда и только тогда, когда ранг подматрицы ограничений, обращаемых этими точками в равенство одновременно, равен $d-1$.

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множествами вершин V и ребер E, $\mid V \mid = n$. Для всякого $G \in K_n$ через VG и EG обозначим соответственно множества вершин и ребер графа G. При этом для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, понимая $u, v \in V$ как пару инцидентных ребру e вершин. Для $W \subseteq V$ положим

$$E_G(W) \equiv E_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u, v \in W\},$$

$$\delta_G(W) \equiv \delta_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u \in W, v \notin W\}.$$

Степенью относительно G (*или* EG) произвольной вершины $u \in V$ назовем величину $d_G(u) \equiv d_{EG}(u) = \mid \delta_G(u) \mid$. Если $G = K_n$, то в обозначениях $E_G(W)$, $\delta_G(W)$ и $d_G(u)$ символ «G» будем опускать. Всякое $R \subset E$ *индуцирует* некоторый подграф T, у которого $ET = R$ и VT – множество вершин из V, инцидентных ребрам множества R. В этой связи там, где не возникает двусмысленности, граф, индуцированный множеством ребер R, будем просто обозначать через R. Для пары графов $G, F \subset K_n$ под $G \cup F$ будем понимать такой граф H, что $VH = VG \cup VF$ и $EH = EG \cup EF$, а под $G \cap F$ – граф, индуцированный множеством ребер $EG \cap EF$. И наконец, *простым циклом* назовем такой связный подграф $C \subset K_n$, что $d_C(u) = 2$ для всех $u \in VC$. При этом простой цикл будем также задавать либо последовательным списком вершин, либо последовательным списком ребер. Простой цикл называется четным, если он имеет четное число ребер, нечетным – в противном случае.

Для $x \in R^E$ и $R \subseteq E$ определим линейную форму

$$x(R) = \sum_{e \in R} x_e.$$

Выберем такое натуральное k, что $1 \leq k \leq n-1$ и kn – четно. Под *k-фактором* графа K_n будем понимать остовный однородный степени k подграф. Обозначим через $\beta^*_{k,n}$ множество всех k-факторов, а через $\beta_{k,n}$ – множество всех связных k-факторов графа K_n. Заметим, например, что $\beta_{2,n}$ – множество гамильтоновых циклов полного графа. Сопоставим множеству E евклидово пространство R^E, а каждому $F \subset K_n$ – его вектор инциденций $x^F \equiv x^{EF} \in R^E$ так, как это описано выше. Пусть

$$P^*_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta^*_{k,n}\},$$

$$P_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta_{k,n}\}$$

– многогранники k-факторов и связных k-факторов соответственно.

С графом K_n свяжем его вершинно-реберную матрицу инциденций A. Структура матрицы A такова: строки соответствуют элементам множества V, а столбцы – элементам множества E и при этом в клетке (u, e) стоит 1,

если вершина u инцидентна ребру e, и 0 – в противном случае. Легко заметить, что A состоит из всевозможных столбцов с двумя единицами и $(n-2)$ нулями. Матрицу инциденций произвольного $F \subset K_n$ обозначим через $A(F)$. Она, очевидно, является подматрицей матрицы A, образованной пересечением строк VF и столбцов EF.

Положим

$$M_{k,n} = \{x \in R^E \mid Ax = \overline{k},\ \ \overline{0} \le x \le \overline{1}\},$$

где $\overline{k}$ – вектор-столбец с n компонентами равными k, $\overline{0}$ и $\overline{1}$ аналогично. В терминах K_n система, определяющая $M_{k,n}$, может быть записана в виде

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in V, \tag{1}$$

$$0 \le x_e \le 1, \quad e \in E. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что вектор инциденций любого k-фактора удовлетворяет системе (2.1)–(2.2). Следовательно, множество $M_{k,n}$ можно рассматривать как полиэдральную релаксацию многогранников $P^*_{k,n}$ и $P_{k,n}$. Кроме того, так как $M_{k,n}$ есть подмножество единичного куба в R^E, то $vert P^*_{k,n} \subset vert M_{k,n}$. Эта релаксация использовалась в работах [3, 4, 6].

В работе [7] было показано, что $M_{k,n}$ имеет нецелочисленные вершины. Пусть $\overline{x} \in M_{k,n}$. С точкой $\overline{x}$ свяжем следующие подграфы:

$C_{\overline{x}}$ – *граф дробности* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $EC_{\overline{x}} = \{e \in E \mid 0 < \overline{x}_e < 1\}$;

$T_{\overline{x}}$ – *граф единиц* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $ET_{\overline{x}} = \{e \in E \mid \overline{x}_e = 1\}$.

В терминах этих графов структура нецелочисленных вершин полиэдра $M_{k,n}$ может быть описана следующим образом.

Теорема 1. *[7]. Точка $\overline{x} \in M_{k,n}$ является вершиной полиэдра $M_{k,n}$ тогда и только тогда, когда она целочисленна, либо ее граф дробности $C_{\overline{x}}$ и граф единиц $T_{\overline{x}}$ удовлетворяют условиям:*

1) $C_{\overline{x}}$ есть объединение четного числа простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов, причем для любого $e \in EC_{\overline{x}}$ имеет место $\overline{x}_e = \frac{1}{2}$;

2) $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k-1$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$ и $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k$ для всех $u \in V \setminus VC_{\overline{x}}$. ■

Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – пара различных точек. Нам понадобятся следующие обозначения:

$R(x^1, x^2) = \{e \in E \mid x^1_e, x^2_e \in \{0,1\},\ x^1_e + x^2_e = 1\}$,

$\overline{R}(x^1, x^2) = E \setminus \{R(x^1, x^2) \cup E(C_{x^1} \cup C_{x^2})\}$,

$U(x^1, x^2) = \{u \in V \setminus V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \mid \delta_{T_{x^1}}(u) = \delta_{T_{x^2}}(u)\}$,

G_{x^1,x^2} – компоненты связности графа, индуцированного множеством ребер $R(x^1, x^2)$, не содержащие вершин из $V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$.

Кроме того, для любых $W \subset V$ и $R \subset E$ положим $\overline{W} = V \setminus W$ и под $B(W, R)$ будем понимать подматрицу матрицы $A(K_n) = A$, образованную строками, соответствующими вершинам множества W, и столбцами, соответствующими ребрам множества R.

Вопрос о смежности пары вершин x^1 и x^2 полиэдра $M_{k,n}$ будем анализировать на основе подсистемы системы (1)-(2), образованной ограничениями, которые одновременно обращаются в равенство точками x^1, x^2. Матрицу этой подсистемы обозначим через $A(x^1, x^2)$. Указанная подсистема выглядит, очевидно, следующим образом:

$$A^T x = \overline{k},$$

$$x_e = 0 \text{ или } 1, \quad e \in \overline{R}(x^1, x^2).$$

Матрицу $A(x^1, x^2)$ схематично можно изобразить так, как показано на рисунке.

	$E(C_{x^1} \cup C_{x^2})$	$R(x^1, x^2)$	$\overline{R}(x^1, x^2)$	
$V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$				
$\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})$	0 0	0		$U(x^1, x^2)$
$\overline{R}(x^1, x^2)$	0	0	I	

Здесь I – единичная матрица.

Так как в правом нижнем углу матрицы $A(x^1, x^2)$ стоит единичная матрица, то, обозначая через B_* матрицу $B(V \setminus U(x^1, x^2), E(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \cup R(x^1, x^2))$, получим

$$\mathrm{rank} A(x^1, x^2) = |\overline{R}(x^1, x^2)| + \mathrm{rank} B_*. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – вершины, $R(x^1, x^2) = \emptyset$. Тогда x^1 и x^2 смежны в $M_{k,n}$, если и только если*

$$|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть x^1 и x^2 смежны. Тогда

$$\frac{n^2 - n}{2} - 1 = \mathrm{rank} A(x^1, x^2) = |\overline{R}(x^1, x^2)| + \mathrm{rank} A(C_{x^1} \cup C_{x^2}),$$

откуда

$$\mathrm{rank} A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \frac{n^2 - n}{2} - 1 - |\overline{R}(x^1, x^2)| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1.$$

Так как в $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ нет висячих вершин, то $|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$. Таким образом,

$$|E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1 = \mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \leq |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|.$$

Предположим, что $|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$. Тогда $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ – набор непересекающихся нечетных циклов, откуда следует, что

$$\mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|.$$

Это, очевидно, противоречит условию $\mathrm{rank}A(x^1, x^2) = \frac{n^2-n}{2} - 1$. Значит, $|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1$.

Достаточность. Из равенства $|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1$ и того, что C_{x^1}, C_{x^2} – наборы нечетных циклов, следует, что $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ либо набор нечетных циклов, среди которых имеются ровно два с общей вершиной, либо набор нечетных циклов с одной хордой. Непосредственными вычислениями легко убедиться, что в обоих случаях матрица $A(C_{x^1} \cup C_{x^2})$ имеет полный ранг, т.е. $\mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1$. Отсюда

$$\mathrm{rank}A(x^1, x^2) = |\overline{R}(x^1, x^2)| + \mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) =$$

$$= |\overline{R}(x^1, x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2}| - 1 = \frac{n^2 - n}{2} - 1,$$

что означает смежность вершин x^1 и x^2.

Теорема доказана. ■

Для анализа смежности вершин в случае $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$ нам понадобятся следующие утверждения. Будем обозначать $\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = V \setminus V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$.

Предложение 1. *Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – вершины и $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$. Тогда*

$$rankB(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2), R(x^1, x^2)) = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| -$$

$$-|U(x^1, x^2)| - |VG_{x^1,x^2}| + rankA(G_{x^1,x^2}). \qquad (4)$$

Доказательство. В матрице $B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2), R(x^1, x^2))$ каждый столбец содержит не более двух единиц. Пусть $R_1 \subseteq R(x^1, x^2)$ – те столбцы, в которых стоит ровно по одной единице. Это означает, что один конец любого ребра из R_1 лежит в $V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$. Пусть $V_1 \subseteq \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})$ – множество всех вершин, инцидентных ребрам из R_1. Ясно, что матрица $B(\{\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)\} \setminus V_1, R_1)$ состоит из нулей и $\mathrm{rank}B(V_1, R_1) = |V_1|$. Тогда

$$\mathrm{rank}B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2), R(x^1, x^2)) = |V_1| +$$

$$+B(\{\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)\} \setminus V_1, R(x^1, x^2) \setminus R_1).$$

Просматривая аналогичным образом столбцы последней матрицы, выделяем множество ребер $R_2 \subseteq R(x^1, x^2)$, один конец каждого из которых лежит в V_1

(т.е. в столбце $e \in R_2$ этой матрицы имеется ровно одна единица), и множество вершин $V_2 \subseteq \{\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)\} \setminus V_1$, инцидентных этим ребрам. Продолжая просмотр, доберемся до таких R_t и V_t, что матрица

$$+B(\{\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)\} \setminus \cup_{i=1}^{t} V_i, R(x^1, x^2) \setminus \cup_{i=1}^{t} R_i)$$

будет либо пустой, либо в каждом ее столбце будет ровно по две единицы. Нетрудно заметить, что эта матрица и будет матрицей $A(G_{x^1,x^2})$. При этом в силу того, что $|\cup_{i=1}^{t} V_i| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| - |VG_{x^1,x^2}|$, получаем

$$\mathrm{rank}B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2), R(x^1, x^2)) = |\cup_{i=1}^{t} V_i| + \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) =$$

$$= |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| - |VG_{x^1,x^2}| + \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}).$$

Утверждение доказано. ■

Предложение 2. *Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – вершины и $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$. Всякий изолированный простой цикл в графе, индуцированном множеством ребер $R(x^1, x^2)$, четен.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что среди таких циклов найдется нечетный – скажем, $C = \{e_1, e_2, \ldots e_t\}$. Любое ребро, инцидентное какой-либо вершине этого цикла и отличное от e_i, $i = 1, \ldots t$, не принадлежит $R(x^1, x^2)$. Значит, полагая, без ограничения общности, что $e_1 \in ET_{x^1}$, заключаем, что $e_2 \in ET_{x^2}$, $e_3 \in ET_{x^1}$, ..., $e_{2l} \in ET_{x^2}$, $e_{2l+1} \in ET_{x^1}$, ..., $e_t \in ET_{x^1}$. Таким образом, из вершины u_*, общей для ребер e_1 и e_2, выходят два ребра, принадлежащие T_{x^1}. Но так как в силу теоремы 3.1, для любой $u \in V$ выполняется равенство $d_{T_{x^1}}(u) = d_{T_{x^2}}(u)$, то из вершины u_* непременно выходят еще два ребра, лежащие в T_{x^2}. (Предпосылка «$d_{T_{x^1}}(u) = d_{T_{x^2}}(u)$ для всех $u \in V$» в случае $k = 2$ имеет иной вид, а имеено «$d_{T_{x^1}}(u) = d_{T_{x^2}}(u)$ для всех $u \in \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})$». Но это не мешает доказательству, ибо при $k = 2$ наличие в $R(x^1, x^2)$ ребра, инцидентного какой-либо вершине из $V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$ означает, что ребра $R(x^1, x^2)$ не индуцируют набора циклов.) Таким образом, $d_{R(x^1,x^2)}(u_*) \geq 4$, что противоречит условию утверждения. ■

Теорема 3. *Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – вершины и $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$. Если x^1 и x^2 смежны в $M_{k,n}$, то*

$$|\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq |R(x^1, x^2)| + |U(x^1, x^2)| \leq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + 1$$

и $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ является набором простых вершинно-непересекающихся циклов.

Доказательство. В силу (3)

$$\mathrm{rank}B_* = \mathrm{rank}A(x^1, x^2) - |\overline{R}(x^1, x^2)| = \frac{n^2 - n}{2} - 1 - |\overline{R}(x^1, x^2)| =$$

$$= |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |R(x^1, x^2)| - 1 \leq \qquad (5)$$

$$\leq |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)|.$$

Так как в $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ нет висячих вершин, то из (5) имеем

$$0 \leq |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq$$

$$\leq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| - |R(x^1, x^2)| + 1, \tag{6}$$

$$|R(x^1, x^2)| \leq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| + 1.$$

Заметим, что всякая вершина из $\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)$ инцидентна не менее, чем двум ребрам из $R(x^1, x^2)$, т.е. для всех $u \in \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)$ имеем $d_{R(x^1,x^2)}(u) \geq 2$. Суммируя эти степени с коэффициентом $\frac{1}{2}$ по всем вершинам из $\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)$, получаем неравенство

$$|R(x^1, x^2)| \geq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)|. \tag{7}$$

Покажем, что $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ – набор непересекающихся циклов. Из (6) и (7) следует, что $0 \leq |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq 1$. Предположим, что $|E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + 1$. Тогда

$$|R(x^1, x^2)| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)|. \tag{8}$$

Из (5) следует, что если $e = uv \in R(x^1, x^2)$, то непременно $u, v \in \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)$. Действительно, в противном случае существует такое $e = uv \in R(x^1, x^2)$, что либо $u, v \in V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$, либо $u \in V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$ и $v \in \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})$. В первом случае в силу того, что всякая вершина из $\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2)$ инцидентна не менее, чем двум ребрам из $R(x^1, x^2)$, имеем

$$|R(x^1, x^2)| \geq \frac{1}{2}\{\sum_{w \in V \setminus U(x^1,x^2)} d_{R(x^1,x^2)}(w)\} + 1 \geq$$

$$\geq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| + 1,$$

что противоречит (8). Во втором случае, обозначив множество $\{V \setminus U(x^1, x^2)\} \setminus \{v\}$ через V', получим

$$|R(x^1, x^2)| \geq \frac{1}{2}\{\sum_{w \in V'} d_{R(x^1,x^2)}(w) + d_{R(x^1,x^2)}(v) - 1\} + 1 \geq$$

$$\geq |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| + \frac{1}{2},$$

что также противоречит (8).

Так как в каждом столбце матрицы $A(K_n)$ стоят ровно по две единицы, то из показанного следует, что матрица $B(V(C_{x^1} \cup C_{x^2}), R(x^1, x^2))$ нулевая. Кроме того, это и (6) влекут тот факт, что матрица $B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1, x^2), R(x^1, x^2))$ является матрицей инциденций некоторого графа L, причем она квадратная.

Следовательно, граф L является набором простых непересекающихся циклов. Отсюда, в силу утверждения 2, получаем, что эти циклы четные и поэтому

$$\mathrm{rank}A(L) < |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| = |R(x^1, x^2)|.$$

Тогда из предположения $|E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + 1$ вытекает, что

$$\mathrm{rank}B_* = \mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) + \mathrm{rank}A(L) < |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| +$$

$$+|R(x^1, x^2)| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1 + |R(x^1, x^2)|,$$

что противоречит равенству (5). Таким образом, $|E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$ и поэтому $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ – набор простых вершинно непересекающихся циклов.

Теорема доказана. ■

Теорема 4. *Пусть $x^1, x^2 \in M_{k,n}$ – вершины, $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$, $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ – набор простых вершинно-непересекающихся циклов. Справедливы следующие утверждения:*

1) если $|R(x^1, x^2)| + |U(x^1, x^2)| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + 1$, то вершины x^1 и x^2 смежны в $M_{k,n}$ тогда и только тогда, когда G_{x^1,x^2} либо пуст, либо является парой простых нечетных циклов с одной общей вершиной;

2) если $|R(x^1, x^2)| + |U(x^1, x^2)| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$, то вершины x^1 и x^2 смежны в $M_{k,n}$ тогда и только тогда, когда G_{x^1,x^2} – четный цикл.

Доказательство. Из условия теоремы и нечетности циклов, образующих граф $C_{x^1} \cup C_{x^2}$, следует, что $\mathrm{rank}A(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = |V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$. Из (4) и (5) нетрудно вывести равенство

$$|VG_{x^1,x^2}| - \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1, x^2)| - |R(x^1, x^2)| + 1. \quad (9)$$

Обозначим через H граф, индуцированный множеством ребер $R(x^1, x^2)$. Ясно, что $G_{x^1,x^2} \subset H$. Пусть $\overline{G}_{x^1,x^2} = H \setminus G_{x^1,x^2}$ (в реберном смысле). Заметим, что $d_{\overline{G}_{x^1,x^2}}(u) \geq 2$ для всех $u \in V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})$ и $d_{\overline{G}_{x^1,x^2}}(u) \geq 1$ для всех $u \in V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$. Значит,

$$|E\overline{G}_{x^1,x^2}| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V\overline{G}_{x^1,x^2}} d_{\overline{G}_{x^1,x^2}}(u) \geq$$

$$\geq |V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap \overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + \frac{1}{2}|V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \quad (10)$$

$$= |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |VG_{x^1,x^2}| - |U(x^1, x^2)| + \frac{1}{2}|V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}),$$

так как G_{x^1,x^2} – набор компонент связности.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству утверждений, сформулированных в теореме.

1) Необходимость. Из (9) сразу следует, что $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |VG_{x^1,x^2}|$. Пусть $G_{x^1,x^2} \neq \emptyset$. Тогда степень всякой его вершины четна и не меньше 2. Значит, $|EG_{x^1,x^2}| = |VG_{x^1,x^2}| + q$, $q \geq 0$. Из (9) и (10) имеем

$$\frac{1}{2}|V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \leq |E\overline{G}_{x^1,x^2}| - |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |VG_{x^1,x^2}| + |U(x^1,x^2)| =$$

$$= |R(x^1,x^2)| - (|VG_{x^1,x^2}| + q) - |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |VG_{x^1,x^2}| + |U(x^1,x^2)| = \quad (11)$$

$$= |R(x^1,x^2)| - |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |U(x^1,x^2)| - q = \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) - |VG_{x^1,x^2}| - (q-1).$$

Покажем, что $VH \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \emptyset$. Действительно, в противном случае $V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \neq \emptyset$ и поэтому из (11) следует

$$1 \leq \lceil \frac{1}{2}|V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| \rceil \leq \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) - |VG_{x^1,x^2}| - q + 1,$$

т.е. $0 \geq \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) - |VG_{x^1,x^2}| \geq q$, что возможно лишь при $q = 0$. Тогда $|EG_{x^1,x^2}| = |VG_{x^1,x^2}|$ и так как степени вершин этого графа не меньше 2, то он является набором циклов, причем $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |VG_{x^1,x^2}| = |EG_{x^1,x^2}|$. В силу утверждения 2 эти циклы четные. Но тогда $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) < |VG_{x^1,x^2}|$. Противоречие.

Таким образом, если $G_{x^1,x^2} \neq \emptyset$, то $VH \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \emptyset$. Тогда $H = G_{x^1,x^2}$ и $A(G_{x^1,x^2}) = B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1,x^2), R(x^1,x^2))$. Кроме того, так как $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |VG_{x^1,x^2}|$ и $V\overline{G}_{x^1,x^2} \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \emptyset$, то из (11) получаем, что $0 \leq 1 - q$ и, следовательно, $q = 1$. Значит,

$$\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |VG_{x^1,x^2}| = |EG_{x^1,x^2}| - 1. \quad (12)$$

Так как в графе G_{x^1,x^2} нет вершин нечетной степени, то из (12) следует, что в G_{x^1,x^2} имеется ровно одна вершина степени 4, остальные – 2. Это значит, что $G_{x^1,x^2} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_t$, где H_1 – пара циклов с одной общей вершиной, H_2, H_3, …, H_t – четные (в силу утверждения 2) циклы, причем H_i, $i = 1,2,\ldots,t$, попарно непересекаются. Так как $A(G_{x^1,x^2})$ перестановкой строк и столбцов может быть приведена к клеточно-диагональному виду, то

$$\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) \leq \mathrm{rank}A(H_1) + \sum_{i=2}^{t} |EH_i| - (t-1) =$$

$$= \mathrm{rank}A(H_1) + |R(x^1,x^2)| - |EH_1| - (t-1).$$

Из (12) получаем

$$|EH_1| > |VH_1| \geq \mathrm{rank}A(H_1) \geq \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) -$$

$$-|R(x^1,x^2)| + |EH_1| + (t-1) = |EH_1| + (t-1) - 1,$$

откуда $t < 2$. Так как $R(x^1,x^2) = EG_{x^1,x^2} \neq \emptyset$ по условию теоремы, то $t \neq 0$. Значит, $t = 1$ и, следовательно, G_{x^1,x^2} – пара циклов с одной общей вершиной.

Нетрудно показать, что эти циклы имеют одинаковую четность. Предположив, что они четны, легко убедиться непосредственными вычислениями, что $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) < |VG_{x^1,x^2}|$, чего быть не может.

Таким образом, доказано, что, действительно, G_{x^1,x^2} либо пуст, либо является парой нечетных циклов с одной общей вершиной.

Достаточность.

$$\mathrm{rank}A(x^1,x^2) = |\overline{R}(x^1,x^2)| +$$
$$+\mathrm{rank}B(\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2}) \setminus U(x^1,x^2), R(x^1,x^2)) + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})|.$$

Если $G_{x^1,x^2} = \emptyset$, то $|VG_{x^1,x^2}| = \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = 0$, и из утверждения 1 получаем

$$\mathrm{rank}A(x^1,x^2) = |\overline{R}(x^1,x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1,x^2)| =$$

$$= |\overline{R}(x^1,x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |R(x^1,x^2)| - 1 = \frac{n^2-n}{2} - 1,$$

то есть вершины x^1 и x^2 смежны в $M_{k,n}$.

Если G_{x^1,x^2} – пара нечетных циклов, то вновь $|VG_{x^1,x^2}| = \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = 0$ и, как и выше, опираясь на утверждение 1, имеем

$$\mathrm{rank}A(x^1,x^2) = |\overline{R}(x^1,x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |R(x^1,x^2)| = \frac{n^2-n}{2} - 1.$$

2) Необходимость. Из (9) следует, что в этом случае $\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = |VG_{x^1,x^2}| - 1$, т.е., в частности, $G_{x^1,x^2} \neq \emptyset$. Тогда, так же как и в 1), из этого можно вывести, что $VH \cap V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) = \emptyset$. Последнее означает, что $H = G_{x^1,x^2}$ и, кроме того, $EG_{x^1,x^2} = R(x^1,x^2)$ и $|VG_{x^1,x^2}| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1,x^2)|$. Иными словыми, $|EG_{x^1,x^2}| = |VG_{x^1,x^2}|$ и, следовательно, G_{x^1,x^2} есть набор непересекающихся четных циклов $H_1, H_2, \ldots, H_t$ (четность следует из утверждения 2). При этом

$$\mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{rank}A(H_i) \leq \sum_{i=1}^{t} (|VH_i| - 1) = |VG_{x^1,x^2}| - t.$$

Так как x^1 и x^2 смежны, то в силу (3) и утверждения 1,

$$\frac{n^2-n}{2} - 1 = \mathrm{rank}A(x^1,x^2) = |\overline{R}(x^1,x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| +$$

$$+|\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - |U(x^1,x^2)| - |VG_{x^1,x^2}| + \mathrm{rank}A(G_{x^1,x^2}) \leq$$

$$\leq |\overline{R}(x^1,x^2)| + |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + |R(x^1,x^2)| - t = \frac{n^2-n}{2} - t.$$

Отсюда заключаем, что $t = 1$, т.е. G_{x^1,x^2} – четный цикл.