интегрирования можно доверять. Но отчасти поэтому пакет назван нами учебным. С его помощью можно иллюстрировать и проблемы, возникающие с численным интегрированием, что само по себе также является полезным. Файл *new_mod.inc* содержит закладываемые в модель конкретные функции пассионарных толчков, типы политических режимов этносов, «функции войны»и др. После сделанных изменений в модулях пакета программ необходимо провести процедуру компиляции с помощью программы *compile.bat*. Запуск пакета производится посредством файла *go.bat*.

Существенным недостатком пакета является то, как написана программа, с помощью которой вносятся изменения в начальные данные и основные константы, характеризующие этнические процессы (файл *new_mod.cf*). Однако больших затруднений при использовании пакета, как показала его эксплуатация, это обстоятельство не вызывало.

Описанное в статье программное обеспечение способствовало исследованиям по созданию более полной модели общества, включающей такие составляющие, как биосфера, этносфера и социосфера [2]. С помощью пакета «ETNOS»в г. Омске проводились уроки в нескольких средних школах, на которых школьники имели возможность убедиться в перспективности привлечения математических методов и компьютерной техники для изучения поведения этнических систем. Пакет использовался при чтении спецкурса «Моделирование этнических и социальных систем» на математическом факультете ОмГУ, а также курса «Проблемы современной математики» на отделении теологии исторического факультета ОмГУ. Пакет «$\mathcal{ETNOS}$» доступен посредством Интернета и находится на сайте http://www.univer.omsk.su/MEP/.

Сделан пока первый шаг, направленный на объединение усилий математиков, программистов и социологов для использования точных методов в области анализа динамики социальных систем, и то, что он вызвал заметный интерес у самых разных исследователей, внушает оптимизм. Это означает, что программное обеспечение подобного рода найдет своих пользователей.

Литература

1. Гумилев Л.Н. *Этногенез и биосфера Земли.* М.: «Мишель и K^0», 1993.

2. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология.* – Омск: ОмГУ, 1997. - 212 с.

3. Гуц А.К., Ланин Д.А., Никитин С.В. *Математическое моделирование этногенетических процессов.* Деп. в ВИНИТИ N 3100-B96. – 17 с.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 2, с.133-145.

УДК 530.12:531.51

ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Куталёв

Can the five dimentions Kalutza-Klein theory of gravitation and electric-magnetical fields be constructed for anisotropic spaces? This will be a success if we will use formulas of Kalutza-Klein theory for Finsler space instead of classic Riemannian space.

1. Введение

В данной работе мы попытаемся обобщить 5-мерную единую теорию гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна на случай финслерова пространства. Использование финслерова пространства обусловлено желанием рассматривать неизотропное пространство-время, т. е. пространство-время, у которого геометрия зависит не только от точки, но и от направления в этой точке. Физически это означает, что в каждой точке скорость света различна для различных направлений. Финслерову геометрию применительно к анизотропному физическому миру начали независимо использовать в 1970-е годы Г.С. Асанов [3], И.К. Бим [4] и Р.И. Пименов [5, 6, 7, 8].

Суть пятимерной теории Калуцы-Клейна заключается в следующем. Физическая реальность рассматривается как пятимерное пространство, свернутое в цилиндр по одному из измерений. Диаметр этого цилиндра очень маленький, поэтому в природе мы наблюдаем только 4 измерения. Геометрия описываемого пространства определяется тензором материи, заданном на пространстве, и пятимерными уравнениями Эйнштейна, связывающими кривизну пространства с этим тензором. Пространство должно быть устроено таким образом, чтобы существовал поток геодезических линий, которые замыкаются сами на себя обходя цилиндр, и через каждую точку пространства проходит одна и только одна такая геодезическая. Вводится специальная система координат, такая, что первые четыре координаты не меняются вдоль этих геодезических, а меняется только пятая координата, которая может служить параметром вдоль

E-mail: kutalev@univer.omsk.su
Омский государственный университет

кривой. Рассмотрим некоторую четырехмерную поверхность, такую, что каждая геодезическая из потока пересекает ее один раз. Будем называть ее в дальнейшем пространственно-временным сечением. При вышеописанных условиях пятимерные уравнения Эйнштейна распадаются на этой поверхности на четырехмерные уравнения Эйнштейна для пространственно-временного сечения и уравнения Максвелла для электромагнитного поля, если считать потенциалами этого поля касательные к потоку геодезических в точках их пересечения с поверхностью.

Весь математический аппарат теории Калуцы-Клейна удается перенести на случай финслерова пространства, за исключением того, что в уравнениях поля появляются дополнительные члены. Эти члены зависят, однако, только от «вертикальной» и «нелинейной» связностей и производных.

За основу принят математический аппарат теории Калуцы-Клейна, изложенный в [1]. Основные соотношения финслеровой геометрии взяты из [2]. Все рассуждения, как и в [1], проведены для обеих сигнатур $(+ - - - +)$ и $(+ - - - -)$, которые определяют: будет ли 5-е измерение времениподобным, или пространственно-подобным соответственно. Во всех формулах верхний знак соответствует первой сигнатуре, а нижний – второй. Далее будем считать большие латинские индексы пробегающими значения 1, 2, 3, 4, 5, а греческие – пробегающими 1, 2, 3, 4.

2. Математический аппарат финслеровой геометрии

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M. $TM = \{T_xM | x \in M\}$ — множество касательных пространств ко всем точкам многообразия M, наделенное естественной топологией, естественной гладкостью и проекцией $\pi : TM \to M$ при $\pi(x, Z) = x$ для любого $Z \in T_xM$, т.е. касательное расслоение к M. Финслеровым многообразием $\mathcal{M}$ называется открытое множество $\mathcal{M} \subset TM$, не содержащее $0 \in T_xM$ ни при одной $x \in M$. Точками его являются (x, Z), где $Z \in T_xM$. Финслеровыми тензорами в точке $(x, Z) \in \mathcal{M}$ будем называть все тензоры в T_ZT_xM, т.е. в касательном в точке Z пространстве к касательному в точке x пространству к M. Построенные таким образом тензоры (тензорные поля) являются функциями от точки финслерова многообразия, т.е. от (x, Z). В координатном представлении точкой финслерова многообразия является комплект $2n$ чисел $(x^1, \ldots, x^n, Z^1, \ldots, Z^n)$ с законом преобразования

$$x^{A'} = x^{A'}(x^1, \ldots, x^n) \in C^\infty$$

$$Z^{A'} = Z^B \frac{\partial x^{A'}(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^B}.$$

Геометрия финслерова многообразия полностью определяется величинами $\Gamma^A_{BC}(x, Z)$, $C^A_{BC}(x, Z)$ и $N^A_B(x, Z)$, называемыми горизонтальной, вертикальной и нелинейной связностями соответственно. Эти величины не являются финслеровыми тензорами так же, как символы Кристоффеля не являются тензорами в римановой геометрии.

Ковариантное дифференцирование понимается как дифференцирование вдоль некоторого пути. Но в финслеровом многообразии $\mathcal{M}$ речь пойдет не о пути ω в M ($\omega : [0,1] \to M, \omega = x(t)$), а о пути Ω в $\mathcal{M} \subset TM$, т.е. о $\Omega : [0,1] \to TM, \Omega = (x(t), Z(t))$ и о касательном векторе к этому пути $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dZ}{dt}\right)$. Громоздкость многих формул финслеровой теории связности в значительной мере обусловлена тем, что вектор из $T\mathcal{M}$, вдоль которого определяется ковариантная производная, 2n-мерен, а результат дифференцирования должен быть финслеровым тензором и, следовательно, должен размещаться в n-мерном пространстве $T_Z T_x M$. Общее же число производных удваивается, т.к. помимо производных по точкам x, возникают еще производные по векторам Z. Пусть $U^A_B(x, Z)$ — один раз ковариантный и один раз контравариантный финслеров тензор. Назовем горизонтальной ковариантной производной величину, определяемую выражением

$$\nabla_C U^A_B = U^A_{B:C} + \Gamma^A_{DC} U^D_B - \Gamma^D_{BC} U^A_D.$$

В этой записи через «:» обозначен оператор частного дифференцирования, определяемый формулой

$$V_{:B} = \frac{\partial V}{\partial x^B} - N^D_B \frac{\partial V}{\partial Z^D},$$

где V произвольный финслеров тензор. Вертикальная ковариантная производная определяется так:

$$\nabla^{+}_C U^A_B = \frac{\partial U^A_B}{\partial Z^C} + C^A_{DC} U^D_B - C^D_{BC} U^A_D.$$

Финслерово многообразие $\mathcal{M}$, наделенное нелинейной, горизонтальной и вертикальной связностями, называется финслеровым пространством ($\mathcal{M}$, N, C, Γ). Финслерово пространство, для которого выполнено

$$N^A_B(x, Z) = Z^C \Gamma^A_{CB}(x, Z), \tag{1}$$

называется финслер-аффинным.

Под финслеровым пространством в литературе часто понимается финслерово многообразие, наделенное метрической функцией $\tau(x, dx)$, удовлетворяющей специальным условиям. Из этой функции можно получить финслерово пространство в описанном выше смысле. Обозначим через

$$G_{AB}(x, Z) = \frac{\partial^2 \tau(x, Z)}{\partial Z^A \partial Z^B}.$$

Пусть теперь мы имеем финслерово многообразие $\mathcal{M}$ и метрический тензор $G_{AB}(x, Z)$ на нем, причем существует тензор G^{AB} обратный к G_{AB}, т.е.

$G_{AB}G^{BC} = \delta_A^C$ — символ Кронекера. По $G_{AB}(x,Z)$ можно восстановить всю финслерову геометрию на $\mathcal{M}$, использовав следующие формулы

$$C^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{AD}\left(\frac{\partial G_{BC}}{\partial Z^D}\right),$$

$$N^A_B = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}G^{AE}\left(\frac{\partial G_{CE}}{\partial x^D} + \frac{\partial G_{DE}}{\partial x^C} - \frac{\partial G_{CD}}{\partial x^E}\right)Z^C Z^D\right)}{\partial Z^B}, \tag{2}$$

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{AD}\left(G_{BD:C} + G_{CD:B} - G_{BC:D}\right). \tag{3}$$

В построенном таким образом финслеровом пространстве тензор $G_{AB}(x,Z)$ ковариантно постоянен, т.е. его вертикальная и горизонтальная ковариантные производные равны нулю $\nabla_C G_{AB} = 0, \nabla^+_C G_{AB} = 0$. Следует отметить также, что построенное по $G_{AB}(x,Z)$ финслерово пространство будет финслер-аффинным. С помощью G_{AB} и G^{AB} стандартным способом определяется поднятие и опускание индексов для финслеровых тензоров.

Тензор кривизны в финслеровом пространстве имеет вид

$$R^A_{BCD} = 2\left(\Gamma^A_{BC:D} - \Gamma^A_{BD:C}\right) +$$

$$+2\left(\Gamma^E_{BC}\Gamma^A_{ED} - \Gamma^E_{BD}\Gamma^A_{EC}\right) + 2C^A_{BE}\left(N^E_{C:D} - N^E_{D:C}\right),$$

а соответствующий тензор Риччи

$$R_{AB} = R^D_{ADB} = 2\left(\Gamma^D_{AD:B} - \Gamma^D_{AB:D}\right) +$$

$$+2\left(\Gamma^C_{AD}\Gamma^D_{CB} - \Gamma^C_{AB}\Gamma^D_{CD}\right) + 2C^D_{AC}\left(N^C_{D:B} - N^C_{B:D}\right). \tag{4}$$

Горизонтальной кривой называется отображение $\omega : [0,1] \to M$, а ее фундаментальным подъемом называется отображение $\Omega : [0,1] \to \mathcal{M}$ такое, что

1) $\pi(\Omega(t)) = \omega(t)$,
2) $\Omega(0) = \left(\omega(0), \frac{d\omega}{dt}(0)\right)$,
3) $Z^A(t)$ являются решением уравнения

$$\frac{dZ^A}{dt} + N^A_B(x(t), Z(t))\frac{dx^B}{dt} = 0. \tag{5}$$

Горизонтальной геодезической называется горизонтальная кривая, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} = -\Gamma^A_{BC}\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)\frac{dx^B}{dt}\frac{dx^C}{dt}.$$

Под размерностью финслерова пространства везде далее будем понимать размерность многообразия M, а не финслерова многообразия $\mathcal{M}$, которое имеет вдвое большую, чем M, размерность.

3. Вывод уравнений поля

Построим теперь расщепление пятимерного финслерова пространства на четырехмерную гиперповерхность и пятое измерение (4+1 расщепление) аналогично тому, как это делается в теории Калуцы-Клейна. Наиболее важной особенностью финслерова случая является то, что само 4+1 расщепление задается потоком именно горизонтальных геодезических. Обозначим через $\lambda^A(x, Z)$ поле касательных к этим геодезическим векторов, тогда в описанной во введении специальной системе координат выполняется $\lambda^1(x, Z) = \lambda^2(x, Z) = \lambda^3(x, Z) = \lambda^4(x, Z) = 0, \lambda^5(x, Z) \neq 0$, где в качестве λ^5 можно выбрать любую гладкую, не обращающуюся в ноль функцию. Запишем 5-мерный метрический тензор G_{AB} в виде

$$G_{AB}(x, Z) = \pm\lambda_A(x, Z)\lambda_B(x, Z) + g_{AB}(x, Z), \tag{6}$$

где $\lambda_A = G_{AB}\lambda^B$. Это выражение определяет g_{AB} — метрический тензор пространственно-временного сечения, ортогонального линиям λ. Подняв оба индекса в (6), получим

$$G^{AB}(x, Z) = \pm\lambda^A(x, Z)\lambda^B(x, Z) + g^{AB}(x, Z). \tag{7}$$

Для составляющих метрического тензора справедливы соотношения:

$$\lambda_A\lambda_B G^{AB} = \pm 1, \quad \lambda_A g^{AB} = 0, \quad g_{AB}g^{AB} = 4,$$

где $g^{AB} = G^{AC}G^{BD}g_{CD}$.

Выберем λ_5 следующим образом :

$$\lambda^5(x, Z) = 1/\sqrt{\pm G_{55}(x, Z)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_B = G_{B5}(x, Z)/\sqrt{\pm G_{55}(x, Z)}$$

и обозначим $\pm G_{55}(x, Z) \equiv \varphi^2(x, Z)$, при этом $G_{5\mu}(x, Z) = \varphi\lambda_\mu(x, Z)$. Тогда составляющие метрического тензора будут иметь вид:

$$\lambda^5 = 1/\varphi; \quad \lambda^\mu = 0; \quad \lambda_5 = \pm\varphi; \quad \lambda_\mu = G_{5\mu}/\varphi; \tag{8}$$

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \mp \lambda_\mu\lambda_\nu; \quad g_{5B} = 0;$$

$$g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}; \quad g^{55} = \pm(\varphi^4 - 1)/\varphi^2; \quad g^{5\mu} = G^{5\mu};$$

$$g^\nu_\mu = G^\nu_\mu; \quad g^5_\mu = \mp\lambda_\mu/\varphi; \quad g^B_5 = 0,$$

где $g^A_B = G^{AC}g_{CB}$.

Рассмотрим преобразования координат вида

$$x^{\mu'} = x^\mu, \quad x^{5'} = x^{5'}(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5); \tag{9}$$

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad x^{5'} = x^5. \tag{10}$$

Эти преобразования переводят нашу специальную систему координат в другую, но имеющую те же свойства, т.е. в ней будут справедливы все формулы этого параграфа, а также сохранится смысл пятой координаты как параметра вдоль потока геодезических 4+1 расщепления. Таким образом, выделяется множество систем координат, связанных преобразованиями (9) и (10).

Назовем 4-тензорами величины, инвариантные при преобразованиях (9) и 4-мерно-ковариантные относительно преобразований (10). Физически значимыми в дальнейшем будем считать только 4-тензоры.

Произвольному 5-тензору $U^{A\cdots}_{B\cdots}$ можно сопоставить скаляр и совокупность пространственно-временных 4-тензоров равного и меньших рангов проектированием его посредством λ_B и g^A_B:

$$U = U^{A\cdots}_{B\cdots}\lambda_A \ldots \lambda^B \ldots; \quad \tilde{U}^{A\ldots}_{B\ldots} = U^{C\cdots}_{D\cdots} g^A_C \ldots g^D_B \ldots,$$

где U с волной — 4-тензор, полученный проектированием тензора U на пространственно-временное сечение.

Видно, что компоненты $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ 4-мерного пространственно-временного тензора образуют 4-тензор. Квадрат интервала 5-мерного финслерова пространства представляется в виде

$$dI^2 = G_{AB}dx^A dx^B = \pm d\lambda^2 + ds^2,$$

где $d\lambda = \lambda_B dx^B$ – интервал вдоль пятой координаты (4-скаляр), $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ – интервал 4-мерного пространственно-временного сечения, ортогонального линиям λ.

Из компонент метрического тензора и их первых производных можно построить следующие физико-геометрические финслеровы тензоры:

$$\Phi_A = \mp\lambda^B(\lambda_{A:B} - \lambda_{B:A}) \to \Phi_\mu = \frac{1}{\varphi}(\varphi_{:\mu} \mp \lambda_{\mu:5}), \tag{11}$$

$$\tilde{F}_{AB} = \pm\frac{1}{2}g^C_A g^D_B(\lambda_{C:D} - \lambda_{D:C}) \to \tilde{F}_{\mu\nu} =$$

$$\pm\frac{1}{2}(\lambda_{\mu:\nu} - \lambda_{\nu:\mu} + \Phi_\mu\lambda_\nu - \Phi_\nu\lambda_\mu). \tag{12}$$

Эти величины в дальнейшем изложении будут сопоставлены с физическими объектами.

Перейдем теперь к построению аппарата дифференцирования. Для того чтобы определить образование новых 4-тензоров с помощью дифференцирования 4-тензоров, необходимо определить оператор частного дифференцирования в 4-мерном пространственно-временном сечении. Этот оператор должен быть инвариантен относительно преобразований (9). Это, однако, сделать классическим способом не удастся. Убедимся в этом на примере произвольного 5-тензора U любой валентности. Рассмотрим переход к штрихованной системе координат, тогда в записи

$$\frac{\partial U}{\partial x^{A'}} = \frac{\partial U}{\partial x^B}\frac{\partial x^B}{\partial x^{A'}} + \frac{\partial U}{\partial Z^B}\frac{\partial Z^B}{\partial x^{A'}} = \frac{\partial U}{\partial x^B}\frac{\partial x^B}{\partial x^{A'}} + \frac{\partial U}{\partial Z^B}Z^{C'}\frac{\partial^2 x^B}{\partial x^{C'}\partial x^{A'}}$$

присутствует член $Z^{C'}\frac{\partial^2 x^B}{\partial x^{C'}\partial x^{A'}}$ (закон преобразования координат $Z^B = Z^{C'}\frac{\partial x^B}{\partial x^{C'}}$). Если же в качестве горизонтальной частной производной рассматривать оператор «:», то от этого члена удастся избавиться. Из финслеровой геометрии известно, что нелинейная связность при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по закону

$$N_B^D\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^D} - N_{D'}^{A'}\frac{\partial x^{D'}}{\partial x^B} = Z^D\frac{\partial^2 x^{A'}}{\partial x^D\partial x^B},$$

$$N_{B'}^{D'}\frac{\partial x^A}{\partial x^{D'}} - N_D^A\frac{\partial x^D}{\partial x^{B'}} = Z^{D'}\frac{\partial^2 x^A}{\partial x^{D'}\partial x^{B'}}.$$

Используя эти выражения, вычисляем

$$U_{:5'} = \frac{\partial U}{\partial x^B}\frac{\partial x^B}{\partial x^{5'}} + \frac{\partial U}{\partial Z^B}Z^{C'}\frac{\partial^2 x^B}{\partial x^{C'}\partial x^{5'}} -$$

$$-\frac{\partial U}{\partial Z^B}\left(Z^{C'}\frac{\partial^2 x^B}{\partial x^{C'}\partial x^{5'}} + N_C^B\frac{\partial x^C}{\partial x^{5'}}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^A}{\partial x^{5'}}\left(\frac{\partial U}{\partial x^A} - N_A^B\frac{\partial U}{\partial Z^B}\right) = \frac{\partial x^A}{\partial x^{5'}}U_{:A}.$$

Учитывая $\lambda^{B'} = \lambda^A\frac{\partial x^{B'}}{\partial x^A}$ и обозначая $U_{"5} = \lambda^B U_{:B} = \lambda^5 U_{:5}$, получим, что $U_{"5} = U_{"5'}$, т.е. оператор «"5» инвариантен относительно преобразований (9) и (10).

Непосредственным вычислением убедимся, что оператор «"μ», определенный как $U_{"\mu} = U_{:\mu} \mp \lambda_\mu U_{"5}$, инвариантен относительно преобразований (9):

$$U_{"\mu'} = U_{:\mu'} \mp \lambda_{\mu'}U_{"5'} = \frac{\partial U}{\partial x^A}\frac{\partial x^A}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial U}{\partial Z^A}Z^{B'}\frac{\partial^2 x^A}{\partial x^{\mu'}\partial x^{B'}} -$$

$$-\frac{\partial U}{\partial Z^A}\left(Z^{B'}\frac{\partial^2 x^A}{\partial x^{\mu'}\partial x^{B'}} + N_C^A\frac{\partial x^C}{\partial x^{\mu'}}\right) \mp \lambda_C\frac{\partial x^C}{\partial x^{\mu'}}U_{"5} =$$

$$= \frac{\partial x^C}{\partial x^{\mu'}}\left(U_{:C} \mp \lambda_C U_{"5}\right) = U_{:\mu} \mp \lambda_\mu U_{"5} = U_{"\mu}.$$

Определение вертикальной частной производной в пространственно-временном сечении не встречает таких трудностей. Обозначим ее «,»: $U_{,5} = \lambda^5\frac{\partial U}{\partial Z^5}$, $U_{,\mu} = \frac{\partial U}{\partial Z^\mu} \mp \lambda_\mu U_{,5}$. Непосредственным вычислением легко убедиться, что оператор «,5» инвариантен относительно (9) и (10), «,μ» инвариантен относительно (9).

Оператор горизонтального ковариантного пространственно-временного дифференцирования

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\sigma}}\tilde{U}^\mu_\nu = U^\mu_{\nu"\sigma} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\gamma}\tilde{U}^\gamma_\nu - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\sigma\nu}\tilde{U}^\mu_\gamma,$$

где использовано обозначение

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}\left(g_{\alpha\sigma"\beta} + g_{\beta\sigma"\alpha} - g_{\alpha\beta"\sigma}\right)$$

– горизонтальная 4-связность, т.е связность пространственно-временного сечения.

Значком «~» всегда далее будем обозначать величины, относящиеся к пространственно-временному сечению, т.е. 4-тензоры и операторы пространственно-временного ковариантного дифференцирования.

Как и в римановом случае теории Калуцы-Клейна постулируем независимость всех рассматриваемых величин (таких, как $G_{AB}, \lambda^A, \Phi_A$ и т.д.) от пятой координаты, т.е. $\frac{\partial U}{\partial x^5} = 0$ для всякого финслерова тензора U. Поток горизонтальных геодезических расщепления дается уравнениями $x^\alpha = const, x^5 = t$, t — параметр кривой. Используем теперь цилиндричность рассматриваемого пространства по пятой координате. Цилиндричность по пятой координате подразумевает, что фундаментальные подъемы этих горизонтальных геодезических должны замыкаться сами на себя, т.е. для этих кривых $Z(t+T) = Z(t)$, где t – параметр кривой, а T – период цилиндра. Поскольку уравнения поднятия горизонтальной кривой имеют вид (5), то для интересующих нас кривых

$$\frac{dZ^A}{dt} + N^A_5(x(t), Z(t)) = 0$$

при параметризации $x^5 = t$. Постулируя $N^A_5(x, Z) = 0$, мы получим $Z^A(t) = const$, т.е. касательное пространство T_xM не испытывает вращений и деформаций при движениях вдоль пятой координаты. Легко видеть, что условия $\frac{\partial U}{\partial x^5} = 0$ и $N^A_5(x, Z) = 0$ вместе дают $U_{:5} = 0$ для произвольного финслерова тензора U. При этом оператор «$"\mu$» совпадет с оператором «$: \mu$».

Введя обозначение $F_{AB} = \lambda_{A:B} - \lambda_{B:A}$ и учтя вышеописанные условия, распишем распадение компонент тензора Риччи (4), состоящих из горизонтальных 5-связностей, на компоненты тензора Риччи пространственно-временного сечения и добавки. Для этого в выражение (3) подставим (6) и (7). Проведя вычисления, получим для 5-связности

$$\Gamma^D_{AB} = \tilde{\Gamma}^D_{AB} \pm \frac{1}{2} g^{DE}(\lambda_A F_{EB} + \lambda_B F_{EA}) +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^D\lambda^E(\lambda_B F_{EA} + \lambda_A F_{EB} + \lambda_E(\lambda_{AB} + \lambda_{BA})). \tag{13}$$

Подставив это выражение в компоненты (4), состоящие из горизонтальных связностей и учитывая (8), получим для них :

$$\Gamma^D_{AD:B} = \tilde{\Gamma}^D_{AD:B} + (\frac{1}{\varphi}\varphi_{:A})_{:B}, \tag{14}$$

$$\Gamma^D_{AB:D} = \tilde{\Gamma}^D_{AB:D} \pm \frac{1}{2} g^{DC}_{:D}(\lambda_A F_{CB} + \lambda_B F_{CA}) \pm$$

$$\pm\frac{1}{2} g^{DC}(\lambda_{A:D} F_{CB} + \lambda_{B:D} F_{CA} + \lambda_A F_{CB:D} + \lambda_B F_{CA:D}), \tag{15}$$

$$\Gamma^C_{AD}\Gamma^D_{CB} = \tilde{\Gamma}^C_{AD}\tilde{\Gamma}^D_{CB} \pm \frac{1}{2} g^{DE} F_{EC}(\tilde{\Gamma}^C_{AD}\lambda_B + \tilde{\Gamma}^C_{DB}\lambda_A) +$$

$$+\frac{1}{4}g^{CH}g^{DE}\lambda_A\lambda_B F_{HD}F_{EC}+\frac{1}{\varphi^2}\varphi_{:A}\varphi_{:B}\pm$$

$$\pm\frac{1}{4}g^{CE}(\lambda_5 F_{EA}-\lambda_A\lambda_{5:E})\lambda^5\lambda^5(\lambda_B\lambda_{5:C}+\lambda_5\lambda_{C:B}+\lambda_5\lambda_{B:C})\pm$$

$$\pm\frac{1}{4}g^{CE}(\lambda_5 F_{EB}-\lambda_B\lambda_{5:E})\lambda^5\lambda^5(\lambda_A\lambda_{5:C}+\lambda_5\lambda_{C:A}+\lambda_5\lambda_{A:C}), \qquad (16)$$

$$\Gamma^C_{AB}\Gamma^D_{CD}=\tilde\Gamma^C_{AB}\tilde\Gamma^D_{CD}\pm\frac{1}{2}\tilde\Gamma^D_{CD}g^{CH}(\lambda_A F_{HB}+\lambda_B F_{HA})\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}g^{CH}(\lambda_A F_{HB}+\lambda_B F_{HA})\frac{1}{\varphi}\varphi_{:C}+\tilde\Gamma^C_{AB}\frac{1}{\varphi}\varphi_{:C}. \qquad (17)$$

Постулируем независимость всех величин от Z^5, тогда оператор «$,\mu$» совпадет с оператором $\frac{\partial}{\partial Z^\mu}$ и выражение для вертикальной связности примет вид

$$C^D_{AC}=\tilde C^D_{AC}\pm\frac{1}{2}g^{DH}(\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^H}+\lambda_A\frac{\partial\lambda_C}{\partial Z^H}),$$

где через $\tilde C^A_{BC}$ обозначена $g^{AD}g_{BC,D}=g^{AD}\frac{\partial g_{BC}}{\partial Z^D}$ — вертикальная 4-связность, т.е. вертикальная связность пространственно-временного сечения.

Выражение для нелинейной связности (2) содержит обычные частные производные по x, аналогов которым не удалось построить в пространственно-временном сечении, поэтому, чтобы построить распадение нелинейной связности, нам придется воспользоваться тем, что исследуемое пространство — финслер-аффинное и в нем справедливо соотношение (1). Подставляя в него (13), имеем

$$N^A_B=Z^C\Gamma^A_{CB}=Z^C[\tilde\Gamma^A_{CB}\pm\frac{1}{2}g^{AE}(\lambda_C F_{EB}+\lambda_B F_{EC})+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^A\lambda^5(\lambda_B\lambda_{5:C}+\lambda_C\lambda_{5:B}+\lambda_5(\lambda_{C:B}+\lambda_{B:C}))]=\tilde N^A_B+M^A_B,$$

где M^A_B определяется как

$$M^A_B=Z^C[\pm\frac{1}{2}g^{AE}(\lambda_C F_{EB}+\lambda_B F_{EC})+$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^A\lambda^5(\lambda_B\lambda_{5:C}+\lambda_C\lambda_{5:B}+\lambda_5(\lambda_{C:B}+\lambda_{B:C}))],$$

а $\tilde N^A_B=Z^C\tilde\Gamma^A_{CB}$ — нелинейная 4-связность.

Тогда для соответствующей компоненты тензора Риччи в (4) :

$$C^D_{AC}(N^C_{D:B}-N^C_{B:D})=\tilde C^D_{AC}(\tilde N^C_{D:B}-\tilde N^C_{B:D})+$$

$$+\tilde C^D_{AC}(M^C_{D:B}-M^C_{B:D})\pm\frac{1}{2}g^{DH}(\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^H}+\lambda_A\frac{\partial\lambda_C}{\partial Z^H})(N^C_{D:B}-N^C_{B:D}). \qquad (18)$$

Итак, мы получили все необходимое для того, чтобы начать выписывать уравнения поля.

Для F_{AB} и $\tilde{F}_{AB}$ имеем соотношение

$$F_{AB} = \pm 2\tilde{F}_{AB} + \Phi_B \lambda_A - \Phi_A \lambda_B.$$

Определенный нами оператор частной производной «:» обладает свойством $U_{:A:B} \neq U_{:B:A}$, где U – произвольный финслеров тензор, поэтому все выкладки нельзя перенести с риманова случая, просто добавив компоненты, содержащие нелинейную и вертикальную связности.

Определим тензор кривизны пространственно-временного сечения формулой

$$^4R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 2\left(\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu:\nu} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\nu:\mu}\right) +$$

$$+2\left(\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\beta\mu}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\nu} - \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\beta\nu}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\mu}\right) + 2\tilde{C}^{\alpha}_{\beta\delta}\left(\tilde{N}^{\delta}_{\mu:\nu} - \tilde{N}^{\delta}_{\nu:\mu}\right),$$

а соответствующий тензор Риччи и скалярную кривизну пространственно-временного сечения как

$$^4R_{\mu\nu} = {}^4R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad {}^4R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Подставляя в (4) выражения (14–18) и используя (11–12) после длительных и громоздких вычислений, получим выражения для пятимерных скалярной кривизны и тензора Риччи:

$$^5R = {}^4R + 4\Phi_\alpha\Phi^\alpha + 4\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\Phi^\alpha \pm 2\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} +$$

$$+2g^{\alpha\beta}\tilde{C}^{\sigma}_{\alpha\gamma}\left[M^{\gamma}_{\sigma:\beta} - M^{\gamma}_{\beta:\sigma}\right] \pm g^{\sigma\delta}g^{A\beta}\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^\delta}\left[M^{C}_{\sigma:\beta} - M^{C}_{\beta:\sigma}\right],$$

$$^5R^{\mu\nu} = {}^4R^{\mu\nu} + 2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\Phi_\beta + 2\Phi^\mu\Phi^\nu \pm 4\tilde{F}^{\mu\sigma}\tilde{F}^{\nu}_{.\sigma} +$$

$$+2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\tilde{C}^{\sigma}_{\alpha\gamma}\left[M^{\gamma}_{\sigma:\beta} - M^{\gamma}_{\beta:\sigma}\right] \pm g^{\mu A}g^{\nu\beta}g^{\sigma\delta}\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^\delta}\left[M^{C}_{\sigma:\beta} - M^{C}_{\beta:\sigma}\right],$$

$$^5R^{\mu}_{.B}\lambda^B = \mp 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\tilde{F}^{\alpha\mu} \mp 4\Phi_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu},$$

$$^5R_{B.}^{\ \mu}\lambda^B = \mp 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\tilde{F}^{\alpha\mu} \mp 4\Phi_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu} \pm$$

$$\pm\lambda^5 g^{\mu\beta}g^{\sigma\gamma}\left(\lambda_C\frac{\partial\lambda_5}{\partial Z^\gamma} + \lambda_5\frac{\partial\lambda_C}{\partial Z^\gamma}\right)\left[M^{C}_{\sigma:\beta} - M^{C}_{\beta:\sigma}\right],$$

$$^5R_{AB}\lambda^A\lambda^B = \pm 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\Phi^\alpha \pm 2\Phi_\alpha\Phi^\alpha - 2\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}.$$

Пятимерные уравнения Эйнштейна запишем в виде

$$^5R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}\,{}^5R + \Lambda G_{AB} = \kappa Q_{AB}.$$

Отличие финслерова случая от риманова заключается еще и в том, что тензор Риччи несимметричен и поэтому уравнений Эйнштейна всего 25. Подставляя в уравнения Эйнштейна полученные выражения для пятимерной скалярной кривизны и тензора Риччи, получим

$$
\begin{aligned}
{}^4\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R + \Lambda g_{\mu\nu} = \mp \left(4\tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_{\nu.}^{\ \alpha} - g_{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \right) - 2\Phi_\mu\Phi_\nu - \\
-2\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}}\Phi_\nu + 2g_{\mu\nu}\left(\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\Phi^\alpha\right) - 2\tilde{C}^\sigma_{\mu\gamma}\left[M^\gamma_{\sigma:\nu} - M^\gamma_{\nu:\sigma}\right] \mp \\
\mp g^A_\mu g^{\sigma\alpha}\lambda_C \frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^\alpha}\left[M^C_{\sigma:\nu} - M^C_{\nu:\sigma}\right] + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\tilde{C}^\sigma_{\alpha\gamma}\left[M^\gamma_{\sigma:\beta} - M^\gamma_{\beta:\sigma}\right] \pm \\
\pm\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\alpha}g^{A\beta}\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^\alpha}\left[M^C_{\sigma:\beta} - M^C_{\beta:\sigma}\right] + \kappa Q_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\mp 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\tilde{F}^{\alpha\mu} \mp 4\Phi_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu} = \kappa Q^\mu_{.B}\lambda^B, \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\mp 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\tilde{F}^{\alpha\mu} \mp 4\Phi_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu} \pm \\
\pm\lambda^5 g^{\mu\beta}g^{\sigma\alpha}\left(\lambda_C\frac{\partial\lambda_5}{\partial Z^\alpha} + \lambda_5\frac{\partial\lambda_C}{\partial Z^\alpha}\right)\left[N^C_{\sigma:\beta} - N^C_{\beta:\sigma}\right] = \kappa Q_{B.}^{\ \mu}\lambda^B
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
3\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \pm \frac{1}{2}{}^4R \mp \Lambda \mp g^{\alpha\beta}\tilde{C}^\sigma_{\alpha\gamma}\left[M^\gamma_{\sigma:\beta} - M^\gamma_{\beta:\sigma}\right] + \\
+\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}g^{A\beta}\lambda_C\frac{\partial\lambda_A}{\partial Z^\alpha}\left[M^C_{\sigma:\beta} - M^C_{\beta:\sigma}\right] = -\kappa Q_{AB}\lambda^A\lambda^B.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Эти уравнения и представляют собой распадение 5-мерных уравнений Эйнштейна на 4-мерные уравнения Эйнштейна и добавки при упомянутом 4+1-расщеплении.

4. Интерпретация результатов и выводы

Вернемся теперь к рассмотрению физического смысла полученных результатов. Выражение

$$
\left(4\tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_{\nu.}^{\ \alpha} - g_{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \right)
$$

в уравнении (19) является тензором энергии-импульса электромагнитного поля, выражение

$$
-2\Phi_\mu\Phi_\nu - 2\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}}\Phi_\nu + 2g_{\mu\nu}\left(\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\Phi^\alpha\right)
$$

есть тензор энергии-импульса скалярного поля φ ($\Phi_\mu = \frac{1}{\varphi}\varphi_{:\mu}$). Выбирая соответствующее сопоставление геометрических величин λ_μ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ физическим векторному потенциалу и тензору электромагнитного поля, можно добиться того, что перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля будет стоять стандартный размерный коэффициент. Аналогично, рассматривая различные сопоставления физической метрики метрике $g_{\mu\nu}$, можно получить различные интерпретации уравнений (19–22), которые подробно описаны в [1, с. 218].

Уравнение (20) представляет собой просто вторую пару уравнений Максвелла.

От большинства добавок, содержащих $\tilde{C}^A_{BC}$ и M^A_B, можно избавиться, введя дополнительное уравнение $M^A_{B:C} = M^A_{C:B}$, это все же не приведет к вырождению в риманов случай (финслерово пространство вырождается в риманово, если G_{AB} не зависит от Z, и тогда тензор Риччи симметричен), т.к. при этом из (21) вычитанием (20) получим условие на кососимметричную часть тензора материи Q_{AB}.

Скалярное поле также можно исключить из нашей модели, приняв $G_{55} \equiv\ const$. Тогда $\varphi \equiv\ const$ и $\Phi_A \equiv 0$. Так сделал в своей работе Калуца, поскольку к моменту построения этой теории квантовая механика не существовала.

Таким образом, мы построили обобщение единой теории гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна на случай анизотропного пространства. Основным результатом этой работы является то, что от введения анизотропии сами физические величины, входящие в уравнения Эйнштейна, не претерпели никаких существенных изменений, кроме добавления слагаемых, зависящих от неизотропности в точке. Это означает, что в рамках единой теории гравитации и электромагнетизма введение анизотропии не противоречит никаким известным теоретическим и экспериментальным данным. А рассмотрение дополнительных слагаемых оставляет надежду на выявление новых закономерностей и их экспериментальную проверку.

Недостатком изложенного метода финслерова обобщения единой теории гравитации и электромагнетизма является то, что оператор пространственно-временного частного дифференцирования «"» содержит пятимерную нелинейную связность вместо четырехмерной. Однако существует вероятность, что от этого недостатка удастся избавиться в будущем.

Литература

1. Владимиров Ю.С. *Системы отсчета в теории гравитации.* – М.: Энергоиздат, 1982.

2. Пименов Р.И. *Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка.* – Сыктывкар, 1987.

3. Асанов Г.С. *О финслеровом обобщении теории относительности.* – Добавление II к книге [9]. С.439-471.

4. Beem J.K. *Indefinite Finsler spaces time-like spaces* // Canadian Journ. of math. 1970. V.22. N 5. P.1035-1039.

5. Пименов Р.И. *К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени* // Докл. АН СССР. 1975. Т.222. N 1. С.36-38.