МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ
и
МОДЕЛИРОВАНИЕ

В серии сборников публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по философии и истории математики, по методике преподавания математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Сборник является реферируемым. Рефераты статей публикуются в журнале "Zentralblat für Mathematik".

Электронная версия сборника представлена в сети «Интернет» по адресу:

http://cmm.univer.omsk.su/

Сборник издается на коммерческие средства кафедры математического моделирования Омского государственного университета.

Кафедра готова к сотрудничеству в издании сборника. Наш E-mail:

cmm@univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере кафедры

http://cmm.univer.omsk.su

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика

Моделирование

Социокибернетика

Теоретическая физика

Вопросы преподавания

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 2, с.4-14.

УДК 513.73, 513.8

ЛИНИИ КРИВИЗНЫ И ВОДОРАЗДЕЛА НА ПОВЕРХНОСТИ

В.Н. Берестовский, Е.В. Давыдова

In given paper you can learn one of possible mathematical definitions of watershad's and river's lines. Their equations are also given here, and then their geometric propositions are studied.

1. Введение

В этой работе, исходя из географического понятия линии водораздела, дается ее математическое определение на модели земной поверхности. Модель задается двумя способами: как график над плоскостью и график над единичной сферой. А затем, используя математическое определение, на модели изучаются геометрические свойства линий водораздела и линий реки. При этом предполагается, что заданная поверхность дважды непрерывно дифференцируема. Введем следующие математические понятия, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 1. Пусть на регулярной поверхности с криволинейной системой координат $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ задано дифференцируемое скалярное поле $f(u, v)$. Его градиентом называется касательный вектор $\text{grad}\, f$ на поверхности, показывающий направление наибольшего убывания f. Тогда

$$\langle \text{grad}\, f(u, v), \vec{dr}(u, v)\rangle = f_u du + f_v dv$$

называется производной скалярного поля f по направлению касательного векторного поля $\vec{dr}(u, v)$, где du и dv определяют направление $\vec{dr}$ на поверхности.

E-mail: berest@univer.omsk.su
Омский государственный университет
Омский государственный педагогический университет

Определение 2. Скалярное поле $f(u, v)$ называется стационарным на линии $u = u(t)$ и $v = v(t)$ на поверхности, если производная f по направлению касательного векторного поля, перпендикулярного к заданной линии, тождественно равна нулю.

Пусть на плоскости Oxy, где за криволинейные координаты приняты $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$, задано скалярное поле $h(x, y)$. В пространстве введем декартовую систему координат, пусть $z = h(x, y)$. Таким образом, в пространстве задана поверхность, являющаяся моделью Земли, где $h(x, y)$ — высота поверхности над плоскостью Oxy. Определим на ней линии стока и линии уровня.

Определение 3. Линией стока называется линия на поверхности, которая проектируется на плоскость Oxy в интегральную кривую векторного поля градиента скалярного поля h. Т.е. высота поверхности над плоскостью быстрее всего убывает по линии стока.

Определение 4. Линией уровня на поверхности называется линия, удовлетворяющая уравнению $h(x, y) = \mathrm{const}$.

Вдоль линии уровня высота поверхности над плоскостью Oxy остается постоянной.

Очевидно, линии стока и линии уровня на поверхности образуют перпендикулярные между собой семейства.

Аналогично эти линии определяются для модели земной поверхности, заданной как график над единичной сферой. В этом случае на единичной сфере, где приняты сферические криволинейные координаты $\theta = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$, задано скалярное поле $r = r(\theta, \varphi)$, которое определяет высоту поверхности над единичной сферой.

Определение 5. Линией кривизны называется линия на поверхности, касательная к которой совпадает с одним из главных направлений.

Определение 6. Геодезической называется линия на поверхности, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.

Дадим географическое определение линии водораздела, известное в энциклопедической литературе.

Водоразделом называется линия на поверхности Земли, которая разделяет сток атмосферных осадков по двум склонам, направленным в противоположные стороны [1].

Склон — это наклонная к горизонту поверхность, при помощи которой данная возвышенная часть литосферы спускается к пониженным пространствам [1].

Сток осадков производится по линиям стока. Осадки, попав в какую-то точку склона по одну сторону от линии водораздела, уже никак не смогут попасть по другую от нее сторону. По единственной линии стока, проходящей через эту точку, они направятся в один из бассейнов рек, которые разграничивает линия водораздела. Что же произойдет, когда осадки попадут на сам водораздел? Естественно предположить, что сток по нему и произойдет. Иначе осадки должны стечь в бассейн реки по одному из склонов, но с таким же успехом они могут стечь и в другой бассейн реки по другому склону. Из этого видно, что линия водораздела является линией стока.

Прокомментируем этот факт на математической модели Земли. Возьмем произвольную точку на линии водораздела вместе с касательной плоскостью к поверхности в ней. Спроектируем касательное пространство на плоскость или на единичную сферу. Выделим два направления, перпендикулярные проекции касательной к линии водораздела. Очевидно, при смещении по этим направлениям высота поверхности будет убывать. Значит, в точке, принадлежащей проекции линии водораздела, будет максимум для обоих этих направлений. Следовательно, производная высоты поверхности по векторному полю, перпендикулярному линии водораздела, равна нулю. Из этого можно предположить, что линия водораздела на модели земной поверхности будет линией стока.

В географии существует понятие высоты поверхности над уровнем моря. Линиями уровня на земной поверхности будем называть такие линии, вдоль которых высота поверхности над уровнем моря остается постоянной. В любой самой маленькой окрестности водораздела лежит бесконечное количество других, отличных от нее линий стока. Очевидно, линия водораздела будет самой пологой из них. Что это значит? Рассмотрим две линии уровня на поверхности Земли и будем перемещаться от одной до другой по различным линиям стока, лежащим близко от линии водораздела. Расстояние, пройденное от одной линии уровня до другой по линии водораздела, будет больше, чем проходящее по остальным близким линиям стока.

Перейдем в математическую модель. Скорость убывания высоты поверхности на линии водораздела меньше, чем на остальных линиях стока из ее окрестности. Значит, квадрат длины градиента, который является проекцией касательного вектора линии стока на плоскость или единичную сферу, на линии водораздела является минимальным. Возьмем произвольную точку M на поверхности. Через нее проходит только одна линия стока. Спроектируем ее на плоскость или на единичную сферу. Возьмем квадрат длины касательного вектора к этой проекции. Величину, равную ему, назовем *крутизной* поверхности в точке M. Пусть l — квадрат длины касательного вектора. Тогда $f = l$ — крутизна, задающая скалярное поле на плоскости, над которой задана поверхность, или на единичной сфере. Очевидно, что на проекции линии водораздела крутизна будет минимальной по отношению к проекциям других близких линий стока. Т.е., если мы будем перемещаться из точки, принадлежащей проекции линии водораздела, в любом из двух перпендикулярных ей направлений в плоскости или на единичной сфере, крутизна начнет увеличиваться. Это происходит в любой точке проекции линии водораздела, поэтому крутизна является стационарным скалярным полем вдоль проекции линии водораздела на плоскость или единичную сферу.

Из всего сказанного следует, что линию водораздела на моделях поверхности Земли можно определить таким образом.

Определение 7. *Линия водораздела* – это регулярная кривая на поверхности, заданной как график над плоскостью или над единичной сферой, удовлетворяющая свойствам:

1) линия водораздела в каждой точке является линией стока;

2) крутизна вдоль проекции линии водораздела на плоскость или на единичную сферу минимальна среди близких проекций линий стока, т.е. она является стационарным скалярным полем вдоль линии водораздела.

Более подробно свойство (2) будет поясняться в разделе 2, из которого последуют уравнения линии водораздела на двух различных моделях поверхности Земли.

Замечание 1. Легче всего представить водораздел на поверхности Земли, как линию, проходящую через вершину горы и разделяющую гору на два склона. Но на самом деле линия водораздела состоит из двух линий стока, выходящих из вершины в противоположные стороны. В математической модели вершиной естественно считать такую точку на поверхности, градиент в которой вырожден. Мы такие точки рассматривать не будем.

Рассмотрим математическую модель поверхности. Пусть поверхность задана в декартовой системе координат и является графиком функции $h(x, y)$. Отразим поверхность симметрично от какой-нибудь плоскости, параллельной Oxy. Проекции линий стока на Oxy на исходной поверхности и на полученной совпадут, но поменяют направление, градиент полученной поверхности будет направлен противоположно градиенту исходной. При таком отражении линии водораздела перейдут в линии, которые назовем линиями реки.

Очевидно, что линия реки удовлетворяет свойствам определения линии водораздела. Чем же линия водораздела отличается от линии реки? Рассмотрим произвольную линию стока, близкую к линии водораздела. Будем опускаться по линии водораздела в точки с меньшей высотой. Чем ниже опускаться, тем сильнее выбранная нами линия стока будет отклоняться от линии водораздела. Это видно из формы поверхности, которая является математической моделью горы. Если взять линию стока, близкую к линии реки, и перемещаться по линии реки в более низкие точки, принадлежащие ей, то близкая к ней линия стока будет, наоборот, приближаться к линии реки.

Следовательно, на плоскости Oxy проекции близких к водоразделу линий стока будут расходиться от проекции водораздела в разные стороны; проекции линий стока, близких к линии реки, будут сходиться к проекции линии реки.

Если поверхность, заданную как график над единичной сферой, симметрично отразить от любой сферы, концентрической с единичной сферой, то произойдет то же самое.

Также в данной работе доказываются две теоремы.

Теорема 1. *Если поверхность задана как график над плоскотью, то линии водораздела и линии реки на ней*

1) являются линиями кривизны;

2) проектируются на эту плоскость в отрезок прямой линии;

3) являются геодезическими на поверхности. ■

Теорема 2. *Если поверхность задана как график над единичной сферой, то линии водораздела и линии реки на ней*

1) являются линиями кривизны;

2) проектируются на эту единичную сферу в дугу окружности, которая является сечением сферы плоскостью, проходящей через центр;

3) являются геодезическими на поверхности. ■

На самом деле, пункты (2) и (3) теорем противоречат с опытом, но, скорее всего, это можно объяснить тем, что поверхность Земли мы приблизили дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью и не учли те свойства Земли, которые мы не описываем здесь геометрически. Например, на плоскогорье линию водораздела можно провести многими способами, но такие точки мы исключили из рассмотрения. Траектория горной реки не всегда совпадает с линией стока, это объясняется действующими на воду физическими силами, которые тоже не описываются здесь геометрически. Возможно, есть альтернативные определения линии водораздела и реки, где вышеупомянутые противоречия не будут возникать.

2. Уравнения линий водораздела и реки

Напомним определение линии водораздела.

Линия водораздела — это регулярная кривая на поверхности, заданной как график над плоскостью или над единичной сферой, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) линия водораздела в каждой точке является линией стока;

2) крутизна вдоль проекции линии водораздела на плоскость или на единичную сферу минимальна среди близких проекций линий стока, т.е. она является стационарным скалярным полем вдоль линии водораздела.

2.1. Уравнение линии водораздела на поверхности, заданной графиком над плоскостью

Пусть поверхность задана в декартовой системе координат: $z = h(x, y)$. Запишем дифференциальное уравнение линии стока. Линией стока является кривая на поверхности, которая проектируется на плоскость Oxy в интегральную кривую векторного поля градиента функции h.

Пусть $\langle \operatorname{grad} h, \vec{da}(x, y)\rangle = h_x dx + h_y dy$ — производная h по векторному полю $\vec{da}$, заданному в Oxy. Очевидно, градиент h имеет такой вид: $\operatorname{grad} h = h_x\vec{i} + h_y\vec{j}$.

На поверхности задана линия: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + h(x(t), y(t))\vec{k}$, где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — ортонормированный базис в E^3, t — какой-нибудь параметр. Тогда $\vec{a}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ — ее проекция на плоскость Oxy. Следовательно, $\vec{da}(t) = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j}$ — касательное векторное поле к проекции линии на плоскость. Поэтому, если линия на поверхности является линией стока, то на ней $\vec{da} = h_x\vec{i} + h_y\vec{j} = \operatorname{grad} h$, т.е. $dx = h_x$, $dy = h_y$.

Крутизна на проекции линии водораздела стационарна. Из ее определения следует, что l, квадрат длины касательного вектора к проекции линии стока, тоже стационарен на линии водораздела. Следовательно, на линии водораздела

$$\langle \operatorname{grad} l(x,y), \vec{da} \rangle = 0, \text{где } \vec{da} = h_y\vec{i} - h_x\vec{j}$$

— направление, перпендикулярное линии стока, а $l = \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} h \rangle = h_x^2 + h_y^2$. Поэтому

$$(h_x^2 + h_y^2)_x h_y - (h_x^2 + h_y^2)_y h_x = 0$$

$$(2h_{xx}h_x + 2h_{xy}h_y)h_y - (2h_{xy}h_x + 2h_{yy}h_y)h_x = 0 \quad \text{или}$$

$$h_{xx}h_xh_y + h_{xy}h_y^2 - h_{xy}h_x^2 - h_{yy}h_xh_y = 0 \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) выполняется на линии водораздела и на линии реки.

Пример 1. Рассмотрим эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = z = h(x,y)$. Найдем на нем линию реки.

$$h_x = \frac{x}{a^2}, \quad h_y = \frac{y}{b^2}, \quad h_{xx} = \frac{1}{a^2}, \quad h_{xy} = 0, \quad h_{yy} = \frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, уравнение линии реки на нем будет таким:

$$\frac{xy}{a^4b^2} - \frac{xy}{a^2b^4} = \frac{xy}{a^2b^2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) = 0.$$

Очевидно, этому уравнению на эллиптическом параболоиде удовлетворяют линии, которые на плоскость Оху проектируются в прямые $x = 0$ и $y = 0$. Если $a > b$, то линией реки естественно считать линию $x = 0$. На второй линии уравнение (1.1) выполняется потому, что ее крутизна тоже стационарна, но, наоборот, максимальна. Очевидно, эти линии будут входить в семейство линий стока. На линиях стока $dy = h_y, dx = h_x$. Найдем уравнения их проекций на плоскость Оху. Пусть $h_x \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h_y}{h_x} = \frac{a^2y}{b^2x}, \quad \text{следовательно,} \quad \frac{dy}{y} = \frac{a^2dx}{b^2x}.$$

Отсюда, уравнением проекций линий стока будет $C_1|y| = C_2|x|^{\frac{a^2}{b^2}}$. Если $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, получаем линию $x = 0$. Если наоборот, то получаем линию $y = 0$.

2.2. Уравнение линии водораздела на поверхности, заданной как график над единичной сферой

Определение 8. Звездной поверхностью относительно точки О в пространстве называется такая поверхность, которую всякий луч, выходящий из точки О, пересекает только один раз.

Любую звездную поверхность можно задать графиком над единичной сферой.

Будем рассматривать сферическую систему координат. Она связана с декартовой следующими формулами:

$x = r\cos\theta\cos\varphi,$
$y = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad \theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi \in (0, 2\pi),$
$z = r\sin\theta.$

где r — радиус точки; θ — угол между радиусом точки и вектором $\vec{k}$; φ — угол между проекцией радиуса на плоскость Oxy и вектором $\vec{i}$. На единичной сфере координатами будут θ и φ.

Пусть в каждой точке единичной сферы определено скалярное поле $r = r(\theta, \varphi)$. Если от каждой точки сферы по радиусу откладывать r, то можно сказать, что у нас задана звездная поверхность, а r — ее высота над единичной сферой.

В каждой точке с радиусом $\vec{r}$ пространства E^3 существует ортонормированный базис $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_r = \sin\theta\vec{k} + \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j}, \\ &\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{k} - \sin\theta\cos\varphi\vec{i} - \sin\theta\sin\varphi\vec{j}, \\ &\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\vec{e}_r$ направлен по радиусу; $\vec{e}_\theta$ — единичный вектор на сфере радиуса r, касательный к линии $\varphi = \mathrm{const}$; $\vec{e}_\varphi$ — к линии $\theta = \mathrm{const}$.

Найдем дифференциальное уравнение линий стока на звездной поверхности. Обозначим $a(\theta, \varphi)$ — единичная сфера, $a(\theta(t), \varphi(\theta))$ — линия на единичной сфере. Следовательно, $\vec{da}(t) = (\vec{e}_r)_\theta d\theta + (\vec{e}_r)_\varphi d\varphi$ — касательный вектор к единичной сфере. Из (1.2) следует:

$$(\vec{e}_r)_\theta = \vec{e}_\theta, \quad (\vec{e}_r)_\varphi = \cos\theta\vec{e}_\varphi, \quad (\vec{e}_\theta)_\theta = -\vec{e}_r,$$

$$(\vec{e}_\theta)_\varphi = -\sin\theta\vec{e}_\varphi, \quad (\vec{e}_\varphi)_\theta = 0, \quad (\vec{e}_\varphi)_\varphi = \sin\theta\vec{e}_\theta - \cos\theta\vec{e}_r. \tag{1.3}$$

Поэтому

$$\vec{da} = (\vec{e}_r)_\theta d\theta + (\vec{e}_r)_\varphi d\varphi = \vec{e}_\theta d\theta + \vec{e}_\varphi \cos\theta d\varphi$$

— касательное векторное поле на единичной сфере.

По определению, производная r по направлению векторного поля $\vec{da}$ равна $\langle \mathrm{grad}\, r, \vec{da}\rangle = r_\theta d\theta + r_\varphi d\varphi$. С другой стороны, $\langle \mathrm{grad}\, r, \vec{da}\rangle = g_1 d\theta + g_2\cos\theta d\varphi$, где g_1, g_2 — составляющие градиента по базису. Приравняем правые части этих выражений:

$$g_1 d\theta + g_2 \cos\theta d\varphi = r_\theta d\theta + r_\varphi d\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$g_1 = r_\theta, \quad g_2 = \frac{r_\varphi}{\cos\theta}, \quad \text{т.е.} \quad \mathrm{grad}\, r = r_\theta\vec{e}_\theta + \frac{r_\varphi}{\cos\theta}\vec{e}_\varphi.$$

Так как на проекции линии стока $d\theta\vec{e}_\theta + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi = r_\theta\vec{e}_\theta + \frac{r_\varphi}{\cos\theta}\vec{e}_\varphi$, следовательно, на ней $d\theta = r_\theta$ и $d\varphi = \frac{r_\varphi}{\cos^2\theta}$.

$$l(\theta,\varphi) = r_\theta^2 + \frac{r_\varphi^2}{\cos^2\theta}$$

— квадрат длины касательного вектора проекции линии стока.

На проекции линии водораздела скалярное поле $l(\theta,\varphi)$ стационарно, поэтому

$$\langle \operatorname{grad} l, \operatorname{grad} r^{\perp}\rangle = 0, \tag{1.4}$$

где $\operatorname{grad} r^{\perp} = \frac{r_\varphi}{\cos\theta}\vec{e}_\theta - r_\theta\vec{e}_\varphi$.

Найдем $\operatorname{grad} l$ аналогично $\operatorname{grad} r$. Следовательно,

$$\operatorname{grad} l = l_\theta\vec{e}_\theta + \frac{l_\varphi}{\cos\theta}\vec{e}_\varphi.$$

Подставим $\operatorname{grad} l$ и $\operatorname{grad} r^{\perp}$ в (1.4):

$$\frac{l_\theta r_\varphi}{\cos\theta} - \frac{l_\varphi r_\theta}{\cos\theta} = 0, \quad \text{значит} \quad l_\theta r_\varphi - l_\varphi r_\theta = 0$$

выполняется на линии водораздела. Очевидно,

$$l_\theta = 2r_\theta r_{\theta\theta} + \frac{2r_\varphi}{\cos\theta}\Big(\frac{r_{\varphi\theta}\cos\theta + r_\varphi\sin\theta}{\cos^2\theta}\Big), \quad l_\varphi = 2r_\theta r_{\theta\varphi} + \frac{2r_\varphi r_{\varphi\varphi}}{\cos^2\theta}.$$

Поэтому должно быть:

$$l_\theta r_\varphi - l_\varphi r_\theta = 2(r_\theta r_\varphi r_{\theta\theta} + \frac{r_\varphi^2 r_{\theta\varphi}}{\cos^2\theta} + \frac{r_\varphi^3\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta} - r_\theta^2 r_{\theta\varphi} - \frac{r_\varphi r_\theta r_{\varphi\varphi}}{\cos^2\theta}) = 0.$$

Следовательно,

$$r_\theta r_\varphi r_{\theta\theta} + \frac{r_\varphi^2 r_{\theta\varphi}}{\cos^2\theta} + \frac{r_\varphi^3\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta} - r_\theta^2 r_{\theta\varphi} - \frac{r_\varphi r_\theta r_{\varphi\varphi}}{\cos^2\theta} = 0 \tag{1.5}$$

— уравнение линии водораздела на звездной поверхности.

3. Геометрические свойства линий водораздела и реки на поверхности, являющейся графиком над плоскостью

Теорема 3. *Если поверхность задана как график над плокотью, то линии водораздела и линии реки на ней*

1) являются линиями кривизны;

2) проектируются на эту плоскость в отрезок прямой линии;

3) являются геодезическими на поверхности.

Доказательство. **1.** Если поверхность задана параметрически: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, то в [2] уравнение линий кривизны записывается так:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Параметризуем поверхность $z = h(x, y)$ следующим образом:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = h(x, y).$$

$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + h(x, y)\vec{k}$ — радиус-вектор поверхности.

Посчитаем E, F, G, L, M, N.

$$E = (\vec{r}_x, \vec{r}_x), \quad F = (\vec{r}_x, \vec{r}_y), \quad G = (\vec{r}_y, \vec{r}_y).$$

$$\vec{r}_x = \vec{i} + h_x\vec{k}, \quad \vec{r}_y = \vec{j} + h_y\vec{k}.$$

Поэтому

$$E = 1 + h_x^2, \quad F = h_x h_y, \quad G = 1 + h_y^2.$$

$$L = (\vec{r}_{xx}, \vec{n}), \quad M = (\vec{r}_{xy}, \vec{n}), \quad N = (\vec{r}_{yy}, \vec{n}).$$

$\vec{n}$ — это нормаль поверхности.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}[\vec{r}_x, \vec{r}_y],$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + h_x^2 h_y^2 + h_x^2 + h_y^2 - h_x^2 h_y^2} = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2},$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & h_x \\ 0 & 1 & h_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}(-h_x\vec{i} - h_y\vec{j} + \vec{k}).$$

$$\vec{r}_{xx} = h_{xx}\vec{k}, \quad \vec{r}_{xy} = h_{xy}\vec{k}, \quad \vec{r}_{yy} = h_{yy}\vec{k}.$$

$$L = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \quad M = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}, \quad N = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}.$$

Если мы подставим E, F, G, L, M, N в уравнение линий кривизны, то в этом случае это уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} \begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ 1 + h_x^2 & h_x h_y & 1 + h_y \\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

Вдоль линии стока $dx = h_x$ и $dy = h_y$, поэтому для того, чтобы линия стока оказалась линией кривизны, нужно, чтобы выполнялось уравнение:

$$\begin{vmatrix} h_y^2 & -h_x h_y & h_x^2 \\ 1 + h_x^2 & h_x h_y & 1 + h_y \\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавим к первой строчке определителя вторую, а затем от третьего столбца отнимем первый:

$$\begin{vmatrix} h_y^2 & -h_x h_y & h_x^2 \\ 1+h_x^2 & h_x h_y & 1+h_y \\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+h_x^2+h_y^2 & 0 & 1+h_x^2+h_y^2 \\ 1+h_x^2 & h_x h_y & 1+h_y^2 \\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+h_x^2+h_y^2 & 0 & 0 \\ 1+h_x^2 & h_x h_y & h_y^2-h_x^2 \\ h_{xx} & h_{xy} & h_{yy}-h_{xx} \end{vmatrix} = (1+h_x^2+h_y^2)(h_{yy}h_x h_y - h_{xx}h_x h_y - h_{xy}h_y^2 +$$

$+h_{xy}h_x^2)$.

Так как $1+h_x^2+h_y^2>0$ для всех x и y, то определитель будет равен нулю, если $h_{yy}h_x h_y - h_{xx}h_x h_y - h_{xy}h_y^2 + h_{xy}h_x^2 = 0$, т.е. на линии водораздела. Следовательно, линия водораздела — это линия кривизны (линия реки тоже является линией кривизны, потому что (1.1) выполняется на ней).

2. Докажем, что линия водораздела спроектируется в отрезок прямой. Для этого докажем, что линия водораздела спроектируется в линию, которая является геодезической на плоскости. Так как геодезической на плоскости является прямая, то из этого будет следовать, что линия водораздела проектируется в отрезок прямой линии. Запишем уравнение геодезической на поверхности $\vec{r}(u,v)$.

$$\begin{vmatrix} \langle \vec{r}_u, \vec{dr}\rangle & \langle \vec{r}_u, \vec{d^2r}\rangle \\ \langle \vec{r}_v, \vec{dr}\rangle & \langle \vec{r}_v, \vec{d^2r}\rangle \end{vmatrix} = 0.$$

Плоскость Oxy в криволинейных координатах $x=\mathrm{const}$, $y=const$ можно задать так: $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$. Следовательно, $\vec{r}_x=\vec{i}$, $\vec{r}_y=\vec{j}$, а уравнение геодезических на Oxy будет таким:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{dx} & d^2x \\ \mathrm{dy} & d^2y \end{vmatrix} = 0.$$

Определим, при каких условиях проекция линии стока будет геодезической на плоскости. Вдоль проекции линии стока $\vec{dr}=(h_x,h_y)$. Следовательно, вдоль нее $\vec{d^2r}=(h_{xx}h_x+h_{xy}h_y, h_{xy}h_x+h_{yy}h_y)$.

Подставим это все в уравнение геодезических на плоскости. Следовательно, если вдоль проекции линии стока на плоскость Oxy выполняется уравнение

$$\begin{vmatrix} h_x & h_{xx}h_x+h_{xy}h_y \\ h_y & h_{xy}h_x+h_{yy}h_y \end{vmatrix} = 0,$$

то она является геодезической. Если мы раскроем определитель, то получим уравнение $h_{xy}h_x^2+h_{yy}h_y h_x - h_{xx}h_x h_y - h_{xy}h_y^2 = 0$, а оно выполняется на линии