Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.20-26.

УДК 519.1

СТРУКТУРА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН РЕЛАКСАЦИИ МНОГОГРАННИКА K-ФАКТОРОВ

Р.Ю.Симанчёв

In this paper the graph structure of the k–factor polytope vertices is described.

1. Введение

В ряде алгоритмов комбинаторной оптимизации широко используется информация о полиэдральной структуре выпуклых оболочек допустимых решений рассматриваемых задач. Широкий класс образуют экстремальные задачи в следующей постановке. Пусть E – конечное множество; $c : E \to R$ – аддитивный функционал на E; $\Im \subseteq 2^E$ – некоторое семейство подмножеств множества E. Требуется найти такой $H^* \in \Im$, что $c(H^*) \geq c(H)$ для любого $H \in \Im$. Полиэдральный подход к анализу и решению такой задачи заключается в сопоставлении ей специального $(0,1)$-многогранника и исследовании полиэдральной и комбинаторной структуры последнего (см., напр., [1]). Множеству E сопоставим евклидово пространство R^E, имея ввиду взаимнооднозначное соответствие между E и множеством координатных осей пространства R^E, после чего для любого $F \in 2^E$ определим его *вектор инциденций* $x^F \in R^E$ как вектор-столбец с компонентами $x^F_e = 1$ при $e \in F$, $x^F_e = 0$ при $e \notin F$. Таким образом, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между 2^E и множеством вершин единичного куба в R^E. Теперь положим

$$P(\Im) = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \Im\}.$$

В силу аддитивности, функционал $c : E \to R$ естественным образом ассоциируется с линейным функционалом $f_c : R^E \to R$, причем $c(F) = f_c(x^F)$ для любого $F \subseteq E$.

Как уже говорилось, полиэдральная структура многогранника $P(\Im)$ играет существенную роль при разработке алгоритмов решения задачи. Например, полное или частичное линейное описание многогранника $P(\Im)$ позволяет применять для решения задачи аппарат линейного и целочисленного линейного

E-mail: siman@univer.omsk.su

программирования [1]; диаметр $P(\Im)$ может служить оценкой числа итераций «наилучшей» симплексной процедуры; классы смежных вершин весьма полезны при разработке алгоритмов локальной оптимизации. На этом этапе существенную роль начинает играть удачный выбор релаксационного множества для многогранника $P(\Im)$, то есть такого многогранного множества $M(\Im)$ (имеющего, в определенном смысле, «более простую» структуру, чем $P(\Im)$), что $P(\Im) \subseteq M(\Im)$. Если при этом $M(\Im) = \{x \in R^E \mid Ax \leq b\}$, где A — $(n \times |E|)$–матрица и b — n–вектор, то $M(\Im)$ мы будем называть *полиэдральной релаксацией* многогранника $P(\Im)$. В отличие от $P(\Im)$, множество $M(\Im)$ может иметь нецелочисленные или иные «лишние» (в смысле описанной выше экстремальной задачи) вершины. Структура последних играет важную роль при генерировании отсекающих плоскостей и при решении задачи их идентификации (см., например, [2, 3].

В настоящей работе описана графовая структура вершин полиэдральной релаксации многогранника k-факторов полного графа.

Нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Выпуклым многогранником (или просто *многогранником*) в пространстве R^d называется выпуклая оболочка конечного множества точек этого пространства. Мы определим *полиэдр* в d-мерном вещественном пространстве как множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств относительно d переменных, если оно ограничено. Согласно теореме Вейля-Минковского, для всякого выпуклого многогранника P существует такой полиэдр F, что $P = F$. Верно и обратное: всякий полиэдр является многогранником. *Гранью* многогранника P называется множество $\{x \in P \mid a^T x = a_0\}$, где $a^T x \leq a_0$ – опорное к P неравенство. Грань называется *p-гранью*, если ее размерность равна p, 0-грани называются *вершинами*. Ясно, что если P – полиэдр, то $x \in P$ является вершиной тогда и только тогда, когда ранг подматрицы ограничений, обращаемых точкой x в равенство, равен d.

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множествами вершин V и ребер E, $\mid V \mid = n$. Для всякого $G \in K_n$ через VG и EG обозначим соответственно множества вершин и ребер графа G. При этом для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, понимая $u, v \in V$ как пару инцидентных ребру e вершин. Для $W \subseteq V$ положим

$$E_G(W) \equiv E_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u, v \in W\},$$

$$\delta_G(W) \equiv \delta_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u \in W, v \notin W\}.$$

Степенью относительно G (или EG) произвольной вершины $u \in V$ назовем величину $d_G(u) \equiv d_{EG}(u) = \mid \delta_G(u) \mid$. Если $G = K_n$, то в обозначениях $E_G(W)$, $\delta_G(W)$ и $d_G(u)$ символ "G" будем опускать. Всякое $R \subset E$ *индуцирует* некоторый подграф T, у которого $ET = R$ и VT – множество вершин из V, инцидентных ребрам множества R. В этой связи, там, где не возникает двусмысленности, граф, индуцированный множеством ребер R, будем просто обозначать через R. Для пары графов $G, F \subset K_n$ под $G \cup F$ будем понимать такой граф H, что $VH = VG \cup VF$ и $EH = EG \cup EF$, а под $G \cap F$ – граф, индуцированный множеством ребер $EG \cap EF$. И наконец, *простым циклом* назовем такой связный подграф $C \subset K_n$, что $d_C(u) = 2$ для всех $u \in VC$. При этом простой цикл будем также задавать либо последовательным списком вершин, либо последовательным списком ребер.

Для $x \in R^E$ и $R \subseteq E$ определим линейную форму

$$x(R) = \sum_{e \in R} x_e.$$

2. Полиэдральная релаксация

На протяжении всей статьи $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных ребер. Выберем такое натуральное k, что $1 \leq k \leq n-1$ и kn – четно. Под *k-фактором* графа K_n будем понимать остовный однородный степени k подграф. Обозначим через $\beta^*_{k,n}$ – множество всех k-факторов, а через $\beta_{k,n}$ – множество всех связных k-факторов графа K_n. Заметим, что, например, $\beta_{2,n}$ – множество гамильтоновых циклов, а $\beta^*_{1,n}$ – множество совершенных паросочетаний полного графа. Сопоставим множеству E евклидово пространство R^E, а каждому $F \subset K_n$ – его вектор инциденций $x^F \equiv x^{EF} \in R^E$ так, как это описано выше. Пусть

$$P^*_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta^*_{k,n}\},$$

$$P_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta_{k,n}\}$$

– многогранники k-факторов и связных k-факторов соответственно.

С графом K_n свяжем его вершинно-реберную матрицу инциденций A. Структура матрицы A такова: строки соответствуют элементам множества V, а столбцы – элементам множества E, и при этом в клетке (u, e) стоит 1, если вершина u инцидентна ребру e, и – 0 в противном случае. Легко заметить, что A состоит из всевозможных столбцов с двумя единицами и $(n-2)$ нулями. Матрицу инциденций произвольного $F \subset K_n$ обозначим через $A(F)$. Она, очевидно, является подматрицей матрицы A, образованной пересечением строк VF и столбцов EF.

Положим

$$M_{k,n} = \{x \in R^E \mid Ax = \overline{k}, \;\; \overline{0} \leq x \leq \overline{1}\},$$

где $\overline{k}$ – вектор-столбец с n компонентами, равными k, $\overline{0}$ и $\overline{1}$ аналогично. В терминах K_n система, определяющая $M_{k,n}$, может быть записана в виде

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in V, \tag{2.1}$$

$$0 \leq x_e \leq 1, \quad e \in E. \tag{2.2}$$

Нетрудно заметить, что вектор инциденций любого k-фактора удовлетворяет системе (2.1) – (2.2). Следовательно, множество $M_{k,n}$ можно рассматривать как полиэдральную релаксацию многогранников $P^*_{k,n}$ и $P_{k,n}$. В [4] показано, что система уравнений (2.1) определяет аффинную оболочку многогранников $P^*_{k,n}$ и $P_{k,n}$. Так как $M_{k,n}$ есть подмножество единичного куба в R^E, то $vertP_{k,n} \subset vertP^*_{k,n} \subset vertM_{k,n}$.

Следующий пример показывает, что $M_{k,n}$ имеет нецелочисленные вершины.

Пример. Пусть $n = 6$, $k = 2$ и, соответственно, $V = \{1, \ldots, 6\}$, $E = \{ij$, где $i, j = 1, \ldots, 6\}$. Определим в K_6 два подграфа: $C = (V, \{12, 13, 23, 45, 46, 56\})$ и $T = (V, \{16, 24, 35\})$. Рассмотрим точку $\overline{x} \in R^E$ с координатами $\overline{x}_{ij} = \frac{1}{2}$ при $ij \in EC$, $\overline{x}_{ij} = 1$ при $ij \in ET$, $\overline{x}_{ij} = 0$ в остальных случаях. Покажем, что $\overline{x} \in vertM_{2,6}$.

Действительно, легко проверяется, что $\overline{x} \in M_{2,6}$. Точка $\overline{x}$ обращает в равенство следующие ограничения из (2.1) – (2.2)

$$\overline{x}(\delta(i)) = 2 \text{ при } i = 1, 2, \ldots 6, \tag{2.3}$$

$$\overline{x}_{ij} = 1 \text{ при } ij \in ET, \quad \overline{x}_{ij} = 0 \text{ при } ij \in E \setminus (ET \cup EC). \tag{2.4}$$

Вычислим ранг этой подсистемы. Ее матрицу обозначим через D. Матрица D квадратная порядка 15. Раскрывая ее определитель по строкам, содержащим по одной единице, то есть по строкам, соответствующим ограничениям (2.4), получим, что $\mid \det D \mid = \mid \det A(C) \mid = 4$. Таким образом, D – квадратная невырожденная матрица и, следовательно, $\overline{x} \in vertM_{2,6}$.

3. Структура нецелочисленных вершин полиэдра $M_{k,n}$

Пусть $\overline{x} \in M_{k,n}$. С точкой $\overline{x}$ свяжем следующие подграфы:

$C_{\overline{x}}$ – *граф дробности* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $EC_{\overline{x}} = \{e \in E \mid 0 < \overline{x}_e < 1\}$;

$T_{\overline{x}}$ – *граф единиц* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $ET_{\overline{x}} = \{e \in E \mid \overline{x}_e = 1\}$.

Лемма 3.1. *Если $\overline{x}$ – нецелочисленная вершина полиэдра $M_{k,n}$, то ее граф дробности $C_{\overline{x}}$ есть объединение простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов.*

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на четыре части. Мы покажем, что 1) $\mid EC_{\overline{x}} \mid \leq n$; 2) $d_{C_{\overline{x}}}(u) \geq 2$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$; 3) $\mid EC_{\overline{x}} \mid = \mid VC_{\overline{x}} \mid$ и 4) граф $C_{\overline{x}}$ не содержит четных циклов.

Так как $\overline{x}$ – вершина, то она обращает в равенство ограничения некоторой квадратной невырожденной подсистемы системы (2.1) – (2.2):

$$x(\delta(u)) = k \text{ при } u \in V', \tag{3.1}$$

$$x_e = 1 \text{ при } e \in E', \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E'', \tag{3.2}$$

$\mid V' \mid + \mid E' \mid + \mid E'' \mid = \frac{n^2-n}{2}$. Так как $\mid V' \mid \leq n$, то ограничений (3.2) в этой подсистеме будет не менее, чем $\frac{n^2-n}{2} - n$. Каждое из них означает целочисленность соответствующей компоненты. Значит, нецелочисленных компонент может быть не более, чем n. 1) доказано.

2) По условию, $C_{\overline{x}} \neq \emptyset$. Предположим, что $d_{C_{\overline{x}}}(u') = 1$ для некоторой $u' \in VC_{\overline{x}}$. Рассмотрим ограничение $x(\delta(u')) = k$, входящее в (3.1). Из предположения следует, что для любого $e \in \delta(u') \setminus \{e'\}$, где $\{e'\} = \delta(u') \cap EC_{\overline{x}}$, справедливо $\overline{x}_e \in \{0, 1\}$. Но тогда $\overline{x}(\delta(u')) = \overline{x}_{e'} + \overline{x}(\delta(u') \setminus \{e'\})$ – нецелочисленно, то есть точка $\overline{x}$ не удовлетворяет условию $x(\delta(u')) = k$ и, следовательно, не лежит в $M_{k,n}$. Противоречие.

3) Заметим, что $\mid V' \mid \geq \mid EC_{\overline{x}} \mid$. Действительно, в подсистеме (3.2) нет уравнений, соответствующих ребрам множества $EC_{\overline{x}}$. Если раскрыть определитель системы (3.1) – (3.2) по строкам, соответствующим уравнениям (3.2), то получится определитель порядка $\mid V' \mid$, который, разумеется, не равен нулю. При этом ни один из столбцов, соответствующих ребрам $EC_{\overline{x}}$, не будет вычеркнут. Следовательно, $\mid V' \mid \geq \mid EC_{\overline{x}} \mid$.

Пусть $\overline{E} = E \setminus (E' \cup E'')$. Тогда подматрица A' матрицы системы (3.1)–(3.2), образованная строками коэффициентов уравнений (3.1) и столбцами, соответствующими множеству $\overline{E}$, является квадратной невырожденной матрицей, ибо получена путем раскрытия определителя системы (3.1) – (3.2) по строкам $E' \cup E''$. Ясно, что $EC_{\overline{x}} \subseteq \overline{E}$. Пусть $W = V' \cap VC_{\overline{x}}$. Матрицу A' можно схематично изобразить так, как показано на рисунке:

$$\begin{array}{c|c:c|}
 & EC_{\overline{x}} & \overline{E} \setminus EC_{\overline{x}} \\
\hline
W & A_1 & A_2 \\
\hdashline
V' \setminus W & A_3 & A_4 \\
\hline
\end{array}$$

Так как среди вершин множества $V' \setminus W$ нет инцидентных ребрам из $EC_{\overline{x}}$, то подматрица A_3 состоит целиком из нулей. Предположим, что $\mid EC_{\overline{x}} \mid > \mid VC_{\overline{x}} \mid$. Тогда $\mid EC_{\overline{x}} \mid > \mid W \mid$ и, следовательно, $\mid V' \setminus W \mid > \mid \overline{E} \setminus EC_{\overline{x}} \mid$, то есть в подматрице A_4 строк больше, чем столбцов. Значит, среди строк матрицы A_4 имеются линейно зависимые. Последнее, в силу того, что A_3 нулевая, означает, что A' содержит линейно зависимые строки, что противоречит ее невырожденности. Таким образом,

$$\mid EC_{\overline{x}} \mid \leq \mid W \mid \leq \mid VC_{\overline{x}} \mid . \tag{3.3}$$

Так как $d_{C_{\overline{x}}} \geq 2$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$, то $\mid EC_{\overline{x}} \mid = \mid VC_{\overline{x}} \mid$.

И наконец, 4). Из 3) и (3.3) следует, что матрица A_1 является вершинно-реберной матрицей инциденций графа $C_{\overline{x}}$, причем – квадратной. Так как A_3

нулевая, то матрица A' – полураспавшаяся и $\det A' = \det A_1 \cdot \det A_4 \neq 0$. Следовательно, $\det A_1 \neq 0$. Так как $C_{\overline{x}}$ – набор непересекающихся циклов, то перестановкой строк и столбцов матрица A_1 может быть приведена к клеточно-диагональному виду, причем каждая клетка является вершинно-реберной матрицей инциденций некоторого цикла из $C_{\overline{x}}$. Значит, $\det A_1 = \det A_{11} \cdot \det A_{12} \cdot \ldots \det A_{1t}$, где A_{1i}, $i = 1, \ldots, t$, – те самые клетки. Легко показать, что если простой цикл четен, то определитель его матрицы равен нулю.

Лемма доказана. ■

Лемма 3.2. *Если $\overline{x}$ – нецелочисленная вершина полиэдра $M_{k,n}$, то $\overline{x}_e = \frac{1}{2}$ для всех $e \in EC_{\overline{x}}$.*

Доказательство. Действительно, пусть C – какой-либо цикл графа $C_{\overline{x}}$. Положим $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$, $e_i = u_i u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, t-1$, $e_t = u_1 u_t$. Так как $\overline{x}_{e_i} \neq 0$, то $\overline{x}_{e_i} + \overline{x}_{e_{i+1}} = 1$. Предположим, что $\overline{x}_{e_1} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда $\overline{x}_{e_2} = \frac{1}{2} - \varepsilon, \ldots, \overline{x}_{e_{2l-1}} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\overline{x}_{e_{2l}} = \frac{1}{2} - \varepsilon, \ldots, \overline{x}_{e_t} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, (так как t – нечетно). Отсюда $\overline{x}_{e_1} + \overline{x}_{e_t} = 1 + 2\varepsilon > 1$, чего быть не может, ибо это означает, что $d_{C_{\overline{x}}}(u_1) > 2$. ■

Лемма 3.3. *Пусть набор C простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов и граф $T \subset K_n$ таковы, что $ET \cap EC = \emptyset$, $d_T(u) = k - 1$ при $u \in VC$ и $d_T(u) = k$ при $u \notin VC$. Тогда точка $\overline{x} \in R^E$ с координатами*

$$\overline{x}_e = \begin{cases} \frac{1}{2}, & e \in EC, \\ 1, & e \in ET, \\ 0, & e \in E \setminus (EC \cup ET), \end{cases}$$

является вершиной полиэдра $M_{k,n}$.

Доказательство. Очевидно, что $\overline{x} \in M_{k,n}$. Точка $\overline{x}$ обращает в равенство следующие ограничения системы (2.1) – (2.2):

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in V,$$
$$x_e = 1 \text{ при } e \in ET, \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E \setminus (EC \cup ET), \tag{3.4}$$

Вычислим ранг этой подсистемы. Всякое уравнение $x(\delta(u)) = k$ при $u \notin VC$ является линейной комбинацией уравнений (3.4), поэтому эти уравнения можно отбросить. Таким образом, нужно вычислить ранг системы

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in VC,$$

$$x_e = 1 \text{ при } e \in ET, \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E \setminus (EC \cup ET),$$

Заметим, что так как $| VC | = | EC |$, то эта система квадратная (ибо $| VC | + | ET | + \frac{n^2-n}{2} - (| EC | + | ET |) = \frac{n^2-n}{2}$). Раскрывая определитель этой системы по строкам, соответствующим уравнениям (3.4), мы получим, что он равен определителю вершинно-реберной матрицы инциденций набора циклов C, который не равен нулю, в силу нечетности циклов. Лемма доказана. ■

Ясно, что в условиях леммы 3.3 граф C является графом дробности точки $\overline{x}$, а граф T – ее графом единиц. Кроме того, так как число вершин нечетной степени во всяком графе четно, то при четном k непременно $| VC |$ четно. Это следует из того, что $VC = \{u \in VT \mid d_T(u) = k-1\}$. Если же k нечетно, то $| V \setminus VC |=| \{u \in VT \mid d_T(u) = k\} |$ – четно и, так как при этом n обязательно четно, вновь имеем четность величины $| VC |$.

Результаты этого параграфа сформулируем в виде теоремы.

Теорема . *Точка $\overline{x} \in M_{k,n}$ является вершиной полиэдра $M_{k,n}$ тогда и только тогда, когда она целочисленна, либо ее граф дробности $C_{\overline{x}}$ и граф единиц $T_{\overline{x}}$ удовлетворяют условиям:*
1) $C_{\overline{x}}$ есть объединение четного числа простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов, причем для любого $e \in EC_{\overline{x}}$ имеет место $\overline{x}_e = \frac{1}{2}$;
2) $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k-1$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$ и $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k$ для всех $u \in V \setminus VC_{\overline{x}}$.

Литература

1. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования:* В 2-х т. М.: Мир, 1991.

2. Padberg M.W., Rinaldi G. *Facet identification for the symmetric travelling salesman problem* // Math, Programming. 1990. N 47. P.219-257.

3. Дергунова Т.В., Симанчёв Р.Ю. *Задача о связном k–факторе: идентификация фасет и алгоритм отсечения* // Фунд. и прикл. матем. Омск, ОмГУ, 1994. С.71-80.

4. Симанчев Р.Ю. *О ранговых неравенствах, порождающих фасеты многогранника связных k–факторов* // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т.3. N 3. С.84-110.