Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.54-59.

УДК 621.317

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК В МНОГОШКАЛЬНОМ ИЗМЕРИТЕЛЕ

Д.Н. Лавров

The joint density function of errors in multi scale a measuring device is deduced by a method of a maximum entropy. Is shown, that this density function is well approximated by a truncated normal density function, which is usually used for a construction of estimations.

1. Введение

Традиционно в работах по многошкальным фазовым измерителям [1, 2, 5] для получения максимально правдоподобной оценки волнового вектора используется усеченная гауссовская плотность

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right)}{\int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ – $(n \times n)$-обратная матрица к корреляционной матрице ошибок измерения разностей фаз; $(\ \cdot\ )^\top$ – операция транспонирования; Ω – гиперкуб,

$$\Omega = \left\{\mathbf{x} : |x_i| \le 0.5,\ i = \overline{1, n}\right\}, \tag{2}$$

так что $\int_\Omega = \int_{-0.5}^{0.5} \dots \int_{-0.5}^{0.5}$. В обоснование выбора такой плотности указывается, что она является хорошим приближением к известным плотностям ошибок фазовых измерений.

Целью данной работы является вывод уравнений для определения совместной плотности распределения ошибок измерения фаз методом максимальной энтропии при известной корреляционной матрице. Известно, что такая плотность соответствует случайному вектору, реализующемуся природой «наибольшим числом способов» [3]. Будет показано, что при определенных условиях усеченная плотность хорошо аппроксимирует плотность с максимальной энтропией. Таким образом, будет дано теоретическое обоснование выбора усеченной гауссовской плотности в качестве плотности распределения ошибок.

E-mail: lavrov@univer.omsk.su

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретный случайный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ размерности n. Каждому значению вектора из конечного подмножества, состоящего из N^n-элементов, области Ω, сопоставлена вероятность принятия компонентами ε_i возможных значений x_{i_j}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$. Обозначим эту вероятность через $p_{i_1,\,\ldots,\,i_n} = P(\varepsilon_1 = x_{i_1}, \ldots, \varepsilon_n = x_{i_n})$. Для краткости, вместо $i_1, \ldots, i_n$ будем писать α, подразумевая под α мультииндекс, так что $p_{i_1,\,\ldots,\,i_n} = p_\alpha$ и $\sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N} = \sum_\alpha$.

Энтропия такого случайного вектора

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = -\sum_\alpha p_\alpha \ln p_\alpha. \tag{3}$$

Введем дополнительные ограничения, первое из которых — условие нормировки:

$$\sum_\alpha p_\alpha = 1. \tag{4}$$

В многошкальных фазовых измерителях обычно известна корреляционная матрица ошибок измерения (или её структура), поэтому вторым условием принимаем равенство

$$\mathbf{R} = \sum_\alpha \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^\top p_\alpha, \tag{5}$$

где $\mathbf{R}$ – корреляционная матрица ошибок измерения, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^{-1}$. Наша задача состоит в нахождении вероятностей p_α, максимизирующих (3) при заданных ограничениях (4), (5). Для получения плотности необходимо перейти к непрерывным случайным величинам, устремив N к бесконечности. О корректности такого перехода см. [4, с.326].

3. Вывод основных соотношений

Для нахождения p_α воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа задачи (3), (4), (5):

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\sum_\alpha p_\alpha \ln p_\alpha + \lambda\left(\sum_\alpha p_\alpha - 1\right) + Sp\left(\sum_\alpha \boldsymbol{M}\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^\top p_\alpha - \boldsymbol{M}\mathbf{R}\right), \tag{6}$$

где λ – скалярный множитель, и $\boldsymbol{M}$ – $(n \times n)$-квадратная симметрическая матрица множителей; $Sp(\,\cdot\,)$ – операция взятия следа матрицы.

Продифференцировав (6) по p_α, получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial p_\beta} = -(\ln p_\alpha + 1) + \lambda + \mathbf{x}_\alpha^\top \boldsymbol{M}\mathbf{x}_\alpha.$$

Приравняв к нулю последнее выражение, после несложных преобразований

$$p_\beta = \exp\left(\lambda + \mathbf{x}_\alpha^\top \boldsymbol{M}\mathbf{x}_\alpha - 1\right). \tag{7}$$

Подставим (7) в условие нормировки и найдем выражение для λ :

$$\lambda = 1 + \ln \sum_{\alpha} \exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}.$$

Тогда (7) перепишется в виде:

$$p_{\beta} = \frac{\exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha} \exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}}. \tag{8}$$

Переходя к непрерывным случайным величинам, получим из (8) выражения для плотности, из (5) – условие на корреляционную матрицу:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right)}{\int_{\Omega} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}} \tag{9}$$

$$\mathbf{R} \int_{\Omega} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}. \tag{10}$$

Аналитическое решение (10) относительно $\boldsymbol{M}$ возможно только в ряде специальных случаев. Так, если областью интегрирования является все пространство (бесконечные пределы интегрирования), то очевидно, что $\boldsymbol{M} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}$ и плотность (9) есть многомерная гауссовская. Свойство гауссовского распределения максимизировать энтропию известно давно и носит название экстремального свойства [4].

В нашем случае областью интегрирования является гиперкуб, определяемый выражением (2). Одномерный случай ($n = 1$) рассмотрен в [6], где показано, что $\boldsymbol{M}$, как скалярный параметр, можно вычислить посредством процесса простой итерации. Причем при начальном условии $\boldsymbol{M} = 0$ первым приближением является $-\frac{1}{2\sigma^2}$; σ^2 – дисперсия ошибки измерения фаз. Из результатов [6] следует, что при независимых компонентах случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ первым приближением к $\boldsymbol{M}$ будет $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$.

4. Численное исследование аппроксимации плотности с максимальной энтропией усеченной гауссовской

Использование (9), (10) для построения максимально правдоподобной оценки волнового вектора возможно, но вряд ли практически ценно, так как каждый раз при изменении размерности вектора, типа формирования фазометрических баз или дисперсии ошибки необходимо решить нелинейное уравнение (10) относительно $\boldsymbol{M}$, что является сложной вычислительной задачей. С другой

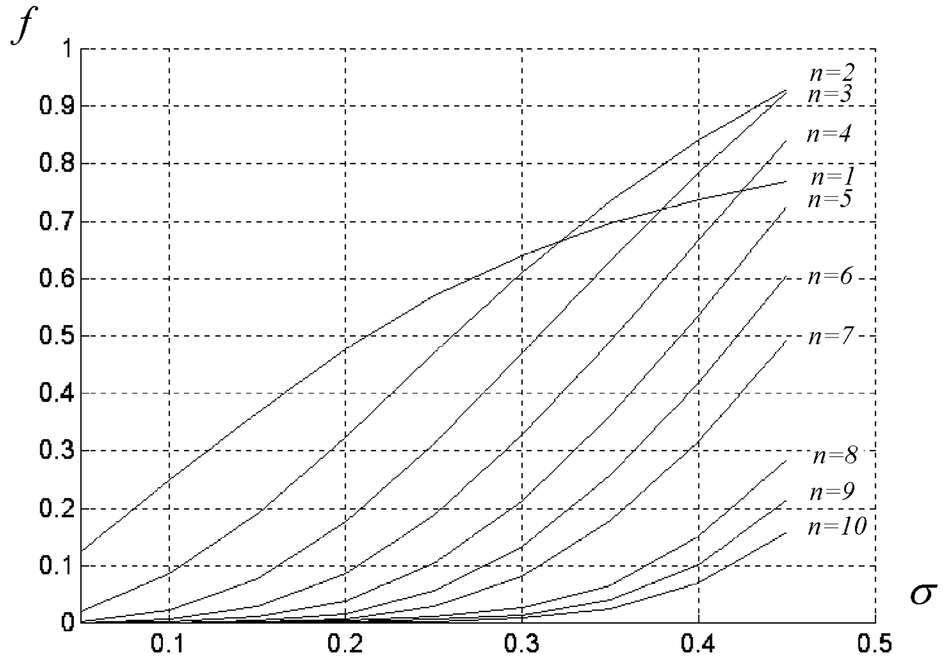

Рис. 1. Графики функции рассогласования

стороны, на основании случая одномерного, случая с независимыми компонентами вектора ошибок и самого вида плотности есть основания полагать, что при малых дисперсиях ошибок хорошим приближением остается $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$.

Рассмотрим практически важный вариант построения измерительной системы – фазовый измеритель с опорной антенной [2], состоящий из однотипных элементов, так что компоненты вектора ошибок измерения имеют одинаковую дисперсию σ^2, а корреляционная матрица

$$\mathbf{R} = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{n} = \begin{cases} \sigma^2, & \textit{если} \quad i = j \\ \sigma^2/2, & \textit{если} \quad i \neq j \end{cases} .$$

Проверим, насколько сильно не выполняется условие (10), если $\boldsymbol{M} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}$. Для этого рассмотрим функцию рассогласования

$$f(\sigma) = \left\| \mathbf{R} \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{x}\mathbf{x}^\top \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \right\|_E , \qquad (11)$$

где $\|\cdot\|_E$ – евклидова норма матрицы. Легко упростить (11) до

$$f(\sigma) = \sqrt{n s_1^2 + n(n-1)s_2^2},$$

где

$$s_1 = r_{1,1} \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x},$$

$$s_2 = r_{1,2}\int_\Omega x_1x_2\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\mathbf{B}\mathbf{x}\right)d\mathbf{x}.$$

Таким образом, вычисление (11) сводится к вычислению трех (n)-кратных интегралов.

На рис.1 представлены графики $f(\sigma)$ при различных значениях n, $n=\overline{1,10}$. По горизонтальной оси отложены значения σ, а по вертикальной – значения функции.

На основании проведенных вычислений можно сделать следующие выводы:

1) при малых дисперсиях усеченная плотность хорошо аппроксимирует плотность с максимальной энтропией, так как матрица $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$ практически удовлетворяет соотношению (10);

2) при увеличении размерности случайного вектора влияние замены $\boldsymbol{M}$ на приближенное значение $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$ снижается, то есть пороговое значение дисперсии, после которого резко падает качество аппроксимации, увеличивается.

5. Заключение

В работе получены соотношения, определяющие экстремальную совместную плотность (то есть плотность с максимумом энтропии из всевозможных плотностей с заданной корреляционной матрицей) распределения ошибок в многошкальной фазовой измерительной системе. При малых дисперсиях эта плотность хорошо аппроксимируется усеченной гауссовской плотностью, которая обычно используется для построения максимально правдоподобной оценки.

Отметим, что при выводе соотношений для плотности не использовались никакие априорные данные, кроме знания корреляционной матрицы. То есть, при отсутствии априорных сведений о распределении ошибки следует строить оценку на экстремальном распределении как соответствующему случайному вектору, реализующемуся природой «наибольшим числом способов».

Литература

1. Белов В.И. *Теория фазовых измерительных систем* / Под. ред. проф. Г.Н.Глазова. – Томск: ТГАСУР, 1994. С.144.

2. Денисов В.П. *О потенциальной точности фазового пеленгатора с антенной системой в виде линейной решетки* // Радиотехника и электроника. 1978. Т.35. N 8. С.1631-1636.

3. Джейнс Э.Т. *О логическом обосновании метода максимальной энтропии* // ТИИЭР. 1982. Т.70. N 9. С.33-51.

4. Пугачев В.С. *Введение в теорию вероятностей.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.

5. Поваляев В.П. *Плотность вероятности максимально правдоподобной оценки параметра в двушкальном измерительном устройстве* // Радиотехника и электроника. 1976. Т.21. N 5. С.1087-1090.

6. Лавров Д.Н. *Плотность с максимальной энтропией ошибки измерения фазы* // Вестник Омского университета. 1997. N 4.