ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ и МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 1

Издание ОмГУ Омск 1998

УДК 513, 514, 519, 530, 681

Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. / Под ред. А.К. Гуца. Омск: Омск. гос. ун-т, 1998. Вып. 1. 122 с.

ISBN 5 – 7779 – 0090 – 9

Сборник составлен из статей преподавателей и аспирантов математического факультета Омского государственного университета.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск - 77, пр. Мира, 55 – А,
Омский государственный университет,
математический факультет
Кафедра математического моделирования

E-mail: guts@univer.omsk.su

zhihal@univer.omsk.su

ISBN 5 – 7779 – 0090 – 9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ и МОДЕЛИРОВАНИЕ

В серии сборников публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по философии и истории математики, по методике преподавания математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Сборник является реферируемым. Рефераты статей публикуются в журнале "Zentralblat für Mathematik".

Электронная версия сборника представлена в сети «Интернет» по адресу:

http://cmm.univer.omsk.su/

Сборник издается на коммерческие средства кафедры математического моделирования Омского государственного университета.

Кафедра готова к сотрудничеству в издании сборника. Наш E-mail:

cmm@univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере кафедры

http://cmm.univer.omsk.su

СОДЕРЖАНИЕ

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.4-12.

УДК 530.12:531.51

МИФ О СВОБОДЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСТОРИЧЕСКОЙ ПРАВДЫ

А.К. Гуц

Can the Past be restored? Poincaré and Costa de Beauregard showed that the past is not restored statistically. This follows from Bayes formula. In given paper two new Principles are postulated which forbid the restoration of the Past.

Способен ли человек, исследователь доподлинно восстановить события прошлых эпох? Подлежит ли История различных цивилизаций, т.е. все то, что имелось в их прошлом, регистрации на бумаге, при которой перо историка, описав вначале основные контуры, постепенно, не без ошибок, но с их исправлением в будущем, уверенно прорисовывает одну деталь за другой?

Одним из самых распространенных в обществе мифов является убежденность, что историческая наука не только способна на это, но и предназначена для такой деятельности. Историк уверен, что внутренне он свободен в осуществлении такой работы. Если ему не будут мешать политики, идеологи, недружественно настроенные коллеги, не будет недостатка средств для экспедиций, командировок и здоровье не подведет, то ничто не будет сковывать его погружение в процесс добывания необходимых фактов, документов. Его спокойному анализу, построению надежной теории ничто не будет мешать, и как результат миру откроется еще один фрагмент, исчезнувшей было во времени Истории человеческой цивилизации.

В этом мифологизированном мире свободного обращения с прошлым живут не только историки, но и все мы, люди, которые стремятся ощутить себя властителями мира ушедшего, мира предков, темного и таинственного. Это страх перед неумолимым ходом времени, отправляющего в Историю одного за другим родственников, друзей, соседей.

1. История и историческая наука

История – это все события, имевшие место в прошлом. Будем писать слово «история» в данном смысле с большой буквы. Можно представить Историю как

E-mail: guts@univer.omsk.su

полный перечень событий прошлого. Объем этого перечня огромен; с точки зрения математики он имеет мощность континуума. Действительно, по мере того как человек, например, историческая личность, живет, он перемещается в пространстве и времени. Каждой точке пространства, где он находился, и в каждый момент времени, когда он пребывал в данной точке, отвечает хотя бы одно событие в его жизни. Но в таком случае перечень событий жизни одного человека – это уже континуум событий, или История одной человеческой жизни. Собрание таких человеческих Историй складывается в Историю человечества. Существует история как наука. По сути дела это также перечень событий прошлого, Летопись, но перечень, составленный историками, т.е. специалистами, подготовленными для подобного рода деятельности. Допускаемые в их деятельности приемы составляют предмет особой науки – методологии истории.

Летопись не просто перечень событий, а насыщенный комментариями, разъясняющими для читателя сущность, смысл описываемых событий. История как наука – не компендиум сведений, а особая форма мышления [6].

Цели, преследуемые историками при составлении Летописи, называемой историей (в данном случае пишем слово «история» с маленькой буквы, чтобы не путать с собственно Историей):

– составить как можно более подробную и полную Летопись, насыщенную *исторически значимыми* событиями;

– снабдить Летопись *научно обоснованными объективными* комментариями; «функция историка – создавать надежно подтвержденные объяснения исторических событий» [4, с.68-69].

В своей жизни каждый историк описанию конкретного события отводит вполне определенный отрезок времени. Следовательно, ему под силу внести в Летопись только конечное число событий. Число историков не более чем счетное, поэтому **полная** Летопись будет содержать счетное число событий. Другими словами история никогда не совпадет с Историей. Восстановление Истории на событийном уровне невозможно. Остается надеяться, что комментарии восполнят пробелы. По существу, подсознательно, интуитивно историки это понимают, именно поэтому столь огромные усилия они тратят на создание комментариев. Этим занимается большинство историков. То есть, на их языке, они восстанавливают историческую правду, а подчас просто занимаются переписыванием истории. Распространенным в их среде является мнение, что комментарии следуют логике фактов, или, на другом языке, логике объективно действующих законов общественного развития, в основе которых заимствованная из естествознания (science=наука) идея причинно-следственной связей между событиями, идея каузальности. Именно по этому поводу Л.Ясперс замечает:«...в вульгарном понимании историков, которые верили в познаваемую необходимость исторического процесса, научная идея каузальности была перенесена на историю в целом. Благодаря этой эволюции уверенность в том, что История (большая буква «И» моя. – А.Г.) может быть постигнута в ее целостности, является в наши дни едва ли не вполне естественным заблуждением. Здесь господствуют приблизительные, недостаточно отчетливые представления: ход вещей в своей совокупности детерминирован, по существу, установлен; при соответствующем исследовании эта детерминированность может быть познана; из прошлого с непреложной необходимостью следует будущее;...» (вот она полная свобода в восстановлении прошлого! – А.Г.). [8, с.198-199].

2. Принцип Байеса

В 1968 году во Франции вышла книга [9], написанная коллективом, посвященная проблемам, связанным с понятием времени. В ней, в частности, Оливье Коста де Борегар утверждал, что «в нашей физической вселенной прослеживание прошедшего, вообще говоря, невозможно. Казалось бы, прошедшее событие, зарегистрированное в документах, относится к числу установленных фактов. Однако в действительности всякое восстановление прошедшего существенно основывается на физиологической памяти; если даже речь идет о фактах, тщательно зарегистрированных в архивах, то и здесь память необходима, т.к. именно она является ключом для интерпретации документов. Память и интуиция служат путеводной нитью при знакомстве со следами прошлого, без них восстановление прошлого окажется лишенным основы...При изучении доисторического человека мы не можем в точности восстановить его облик или выяснить способы применения им своих орудий, если не будем опираться на сходство между людьми, которых разделяют тысячелетия, и пользоваться аналогией между проблемами, возникающими между нашими далекими предками, и проблемами, возникающими между нашими соотечественниками» [2].

Коста де Борегар обратил внимание на то, что использование знания настоящего при оценке исторического события может внести уточнения, но при условии достаточно точного априорного знания об этом событии, т.е. знания, полученного до того, как привлекаются современные сведения. Другими словами, неточность априорного знания может повлиять на окончательный вывод так, что с ним трудно будет согласиться. По сути дела, Коста де Борегар использовал исследования Пуанкаре по статистической механике.

Проблема заключается в поиске ответа на следующий вопрос. Можно ли на основе некоторого количества собранных документов, фактов о прошлом, т.е. некоторого *статистического материала* о прошлом, делать обоснованные заключения по влиянию одного из факторов, представленных в этом материале, на интересующее нас историческое событие в том случае, когда в нашем распоряжении оказались новые документы, касающиеся данного события. Другими словами, в какой мере новые знания, новые документы позволяют «пролить свет» на причину того или иного исторического события. Казалось бы, новые знания могут, как говорят, «снять вопрос и закрыть старую проблему».

Это интересовало Пуанкаре, который обосновал статистическую предсказуемость будущего, и естественно пытался понять, восстановимо ли статистически прошлое [2]. Выяснилось, что нет, не восстанавливается.

Следуя идее [2, с.128-130, 12-13], рассмотрим пример, поясняющий такой вывод. Пусть Π –число всех известных по документам сражений французов, закончившихся поражением, в которых перечислялись различные причины поражения. Предположим, что в K_b сражениях в качестве (основной) причины указывалась болезнь командующего. Значит, доля сражений с больным командующим или (частотная, статистическая) вероятность болезни командующего, как причины поражения, равна $\mathbf{P}(B) = K_b/\Pi$, а вероятность того, что причина иная – $\mathbf{P}(Z) = (\Pi - K_b)/\Pi = 1 - \mathbf{P}(B)$.

Представим, что мы живем в 1815 году и, открыв газету, узнали, что в битве под Ватерлоо Наполеон потерпел поражение, однако причина поражения в газете не указывалась. Поражение под Ватерлоо – это событие Π_V.

Можно ли, *узнав* о поражении Наполеона (и только это), выяснить, не явилась ли его болезнь причиной поражения на основе наших исторических знаний, т.е. статистических данных о всех поражениях французов до 1815 года?

Будем считать, что поражение французов почти неизбежно, если Наполеон был болен, как и всякой армии, теряющей вдруг своего командующего. Это означает, что условная вероятность $\mathbf{P}(\Pi_V \mid B) = 1$.

Обозначим через $b = \mathbf{P}(B)$ *априорную* вероятность болезни Наполеона во время сражения. Это вероятность, вычисленная на основе полных статистических данных, имевшихся в распоряжении историков. Тогда $\mathbf{P}(B \mid \Pi_V)$ – *апостериорная* вероятность того, что Наполеон был болен при условии поражения армии французов под Ватерлоо. Вычисление вероятности $\mathbf{P}(B \mid \Pi_V)$ – это попытка выяснить, болел ли на самом-то деле Наполеон во время сражения или нет, и увидеть в этом причину разгрома, привлекая «новые знания» – газетное сообщение о том, что имело место событие Π_V = французы потерпели поражение. Из формулы Байеса получаем

$$\mathbf{P}(B \mid \Pi_V) = \frac{b}{b + s(1-b)} \geq b,$$

где $s = \mathbf{P}(\Pi_V \mid Z)$ – вероятность того, что армия потерпела поражение по иным, кроме болезни командующего, причинам. Таким образом, знание «нового факта» = события Π_V позволяет заключить, что вероятность болезни Наполеона a posteriori, т.е. с учетом новых данных (событие Π_V), не меньше вероятности болезни Наполеона a priori, т.е. до того, как была открыта газета. Получается вроде бы, что привлечение новых данных уточняет априорную вероятность. Но нужно знать еще условную вероятность s. Попробуем привлечь для этого специалистов-историков по эпохе наполеоновских войн. Если они скажут что им, как специалистам, располагающим статистическим материалом, удалось выяснить, что Франция к 1815 году истощила все свои людские и материальные резервы и это основная причина поражения, а никакая там болезнь, иначе говоря, $s \approx 1$. Следовательно, $\mathbf{P}(B \mid \Pi_V) \approx b$, т.е. происходит подтверждение полученной ранее оценки вероятности болезни и новое знание мало что проясняет. Но если историки заявят, что по их данным состояние «тыла » Наполеона не играло роли, т.е. $s \approx 0$, то $\mathbf{P}(B \mid \Pi_V) \approx 1$. Иначе говоря, знание того факта, что сражение проиграно, прояснило загадку поражения: Наполеон был болен, и это главная причина поражения.

Но последний вывод сделан, как кажется другим специалистам на шатком предположении $s \approx 0$. И это вызвано скудностью статистического материала, и надо надеяться, что потомки, получив новые известия из Франции, смогут на основе дополнительных новых документов установить историческую правду. Но об этой надежде на потомков поговорим ниже.

Допустим, что $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(Z) = 1/2$, т.е. статистический материал скуден; документы так расплывчато описывают состояние здоровья командующих, что полная неопределенность с выводом о заболеваемости французских командующих в проигранных битвах – не то чтобы были больны, но и нельзя точно заявить о полном здравии, точнее, о других причинах, ведущих к поражению армии. Тогда

$$\mathbf{P}(B \mid \varPi_V) = \frac{1}{1+s}.$$

Значит, если специалисты говорят, что вероятность потерпеть поражение при условии Z небольшая, скажем, $s = 1/8$, то $\mathbf{P}(B \mid \varPi_V) = 8/9$. Никаких сомнений, император был болен. Вывод сделан на очень сомнительном заявлении специалистов, и нужен поиск новых документов... Если же $s \approx 1$, то $\mathbf{P}(B \mid \varPi_V) \approx 1/2$. Опять никакой ясности с болезнью Наполеона. Поэтому Коста де Борегар делает вывод: «Восстановление прошлого может производится лишь в том случае, если известны априорные вероятности, то есть если уже предполагается какое-то знание о прошедшем, знание настоящего может его только уточнить» [2, с.130].

Априорные вероятности берутся из статистического материала. который для них всегда дает приближенное значение. Ситуация вполне характерная для любой науки. Именно поэтому идут заявления о необходимости поиска новых документов. Но после вновь найденного документа процесс необходимости уточнения априорной вероятности повторится; и так до бесконечности. Никогда не наступит полная ясность; История не желает совпадать с Летописью.

3. Закон о неопределенности описания

Замечено, что при описании одного явления, имевшего место в Истории, по мере его изучения число деталей естественным образом начинает увеличивается. Это радует исследователя, поскольку картина происшедшего становится все более объемной, красочной, насыщенной самыми разнообразными деталями. Однако детали и подробности начинают все сильнее разниться и, более того, вступать в противоречие, если исследователь начинает концентрировать внимание на очень небольшом отрезке изучаемого исторического действия. От радости, когда на смену периода отсутствия каких-либо документов о данном явлении приходит время обнаружения архивных, фактических или литературных сведений об интересующем исследователя событии, постепенно не остается никакого следа. Приходится как-то разъяснять разнобой, несогласованность, разночтения, и заведомые противоречия. При этом, как правило, часть документов или фактов объявляются ошибками современников, связанными с их субъективностью в оценке наблюдавшегося, другие – фальшивками, ну а некоторые из них просто как не заслуживающими внимания! Далеко не каждый историк при написании статьи или книги приводит или хотя бы упоминает о документах или фактах, противоречащих излагаемому им. Хуже того, очень часто, даже говоря об иной точке зрения своего коллеги, воззрения собрата по науке комментируются таким образом, что у читателя должно остаться мнение о «слабой научной аргументации» или о «научной несостоятельности». Теория оппонента, в отличие от той, которой придерживается автор, именуется всего лишь «гипотезой», которая встречена «справедливой критикой» [1, с.4].

Торжествует та теория, которая вписывается в действующую в исторической науке парадигму [5]. Борьба автора иной точки зрения может привести к успеху, если этот иной взгляд на проблему не противоречит действующей парадигме. Ярким примером безуспешной вековой борьбы является идея об ошибочности общепринятой глобальной хронологии Скалигера [7].

По мере развития исторической науки утверждаются теории, построенные лишь на некоторой совокупности документов и фактов, которые *признаны* официальной наукой, т.е. действующей в рамках современной парадигмы. Методы этой науки *считаются* научными и, следовательно, основная часть отвергнутых документов и фактов , т.е. *объявленных не заслуживающими внимания* обречена на забвение. Более того, официальная теория с временем становится *непроверяемой* и в силу этого живущей достаточно долго. Что заставит усомниться в действующей теории? Это обнаруженные новые противоречащие теории документы или факты, с которыми официальная научная традиция не может не считаться. В математике перепроверку теории может провести любой (!) математик, и в силу этого математические теории самые прочные и практически неизменяемые; в физике теория признается неверной или действующей с вновь вводимыми ограничениям, если «его Величество эксперимент» укажет на несостоятельность теории. В исторической науке, как правило, сами *главные документы, факты, экспонаты* и т.д., положенные в основу теории, являются **недоступными** для историков.

Исследователю остается только *надеяться* (!) на добросовестность своих предшественников и *верить*(!) заявлениям тех, кто хоть что-то видел сам или держал нечто важное в своих руках. Верить, что перевод с древнегреческого на русский был сделан правильно, если не знаешь древнегреческого. А если знаешь, то все равно это не гарантирует тебе доступа к древнему папирусу. **Большинство** специалистов по древней Греции никогда не держали в руках древних документов. Именно «не держали», поскольку можно видеть и фотографию документа, но приходится ВЕРИТЬ, что это фотокопия подлинника! Скажут: нельзя не верить всем. Верно. Физики и математики также вынуждены верить расчетам друг друга, но здесь есть особая мера доверия: взорвавшаяся на старте ракета, утечка радиоактивного вещества и т.д. Короче говоря, можно и за решетку попасть всей компанией, если один был неаккуратен в вычислениях, а другие их не перепроверили. Никому не приходилось слышать фразы о восстановлении исторической справедливости какой-либо ранее доказанной теоремы, хотя и находят подчас ошибки в доказательствах каких-либо теорем или в технических расчетах. Но обычно это делается либо достаточно быстро, после публикации, либо данная теорема пылиться на полке вместе с опубликовавшим ее журналом **без** употребления.

Вера не является методом науки. И наука – всего лишь созданная западноевропейцами science, т.е. то, что в России называется естествознанием. Поэтому история ни есть наука; наука не основывается на вере.

В истории ситуация кардинально иная. Нет ответственности за свою теорию, кроме ответственности посредством своего научного авторитета. Как правило, утвердившаяся теория переживает своего создателя, и спросить за ошибку в работе с документами бывает не с кого, и, кроме того, тот, кто начинает восстанавливать историческую правду, действует в рамках нормальной по Куну исторической науки, т.е. принимая во внимание одни документы и **отбрасывая**, естественно, как не заслуживающие внимания, другие. И он не может действовать иначе, поскольку действует *закон о неопределенности описания.*

Выразим этот закон в виде формулы

$$\Delta D \Delta t \geq c_1, \qquad (1)$$

где ΔD – историческая неопределенность, т.е. число расхождений в описании исторического события, занимающего временной отрезок Δt; число противоречивых деталей, касающихся исторического действия, приходящегося на временной отрезок Δt, c_1 –некоторая константа. Таким образом, чем меньше отрезок времени исследуемого исторического события, тем больше подробностей, отнюдь не обязанных быть непротиворечивыми.

4. Закон о взаимодействии эпох

Попытаемся сформулировать другой закон, затрагивающий природу времени, который выглядит более фантастическим, но в то же самое время поясняющим, почему прошлое столь неуловимо.

Если более глубоко вдуматься в содержание закона о неопределенности исторического описания, то возникает следующий вопрос. Применение этого закона к ситуации, когда необходимо восстановить подробности совершенного в прошлом преступления, означало бы невозможность проведения такого рода расследования. Ведь в таких делах важно знать *все* подробности действия, осуществленного часто за ничтожно малый отрезок времени. А сформулированный нами закон, вроде бы, не надеется на реальность подобного розыскного мероприятия. Так что, не верен закон? Если верен, то мы вынуждены констатировать наличие полной необъективности при нахождении истинного преступника. Другими словами, следствие занимается добыванием фактов, а на их основе вырабатывают версии, которые больше направлены на самообман следователей. Значит, наказывают не того, кто виноват, а того, кто подпадает под более убедительную для следователей и суда версию преступления? Думается, юристы с этим не согласятся, и будут правы. Плоха не формулировка, а недоговоренность об условиях применения закона.

Закон о неопределенности исторического описания действует только при условии выполнения другого – *закона о взаимодействии эпох*, который гласит, что историческая неопределенность ΔD тем больше, чем дальше во времени отстоит исследуемая эпоха от современной. Символически этот закон записывается в виде

$$\Delta D \leq c_2 \Delta\tau, \tag{2}$$

где $\Delta\tau$ – интервал времени между современной и исследуемой эпохами, c_2 – некоторая константа. Таким образом, остаются сложности при расследовании преступлений с большим сроком давности; чем более древним является преступление, тем больше разночтений и меньше шансов докопаться до истины. Вот отсюда-то и следует, что надеяться на потомков, о чем говорилось в §2, не приходится.

Соотношение (2) походит на закон Шеннона, гласящего, что количество информации (изменяющееся от одной системы к другой и от одного канала к другому), которое может передаваться и приобретаться, всегда ограничено известным пределом, пропорциональным прошедшему времени [2, с.124]:

$$\Delta I \leq k\Delta\tau.$$

Из (1) и (2) следует важное ограничение

$$\Delta\tau\Delta t \geq c_1 c_2^{-1}$$

или

$$\Delta t \geq c_1 c_2^{-1}\frac{1}{\Delta\tau} \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta\tau \to \infty. \tag{3}$$

Оно означает, что для восстановления событий на отрезке времени Δt необходимо, чтобы интересующая эпоха была не слишком близкой к текущей. Из соотношений (1)-(3) определяются константы c_1 и c_2. Они должны быть таковыми, чтобы возможны были расследования преступлений недалекого прошлого. Например, если преступление совершено 1*час* назад, $\Delta\tau = 60$ *мин*, то должна существовать возможность восстановить **однозначно,** $\Delta D = 0$, ход событий поминутно, $\Delta t = 1$. Иначе говоря, $c_1 \leq 1$ [*мин*$^{-1}$], а $c_2 \leq 1/60$ [*мин*$^{-1}$]. Можно взять $c_1 = 1$ [*мин*$^{-1}$], а $c_2 = 1/60$ [*мин*$^{-1}$]. В целом, однако, нахождение констант c_1 и c_2 непростая задача.

Можно предположить, что взаимодействие эпох имеет более сложный колебательный характер с возрастающей амплитудой

$$\Delta D \leq c_2\Delta\tau f(\Delta\tau)\cos\left(\frac{2\pi\Delta\tau}{T}\right), \tag{4}$$

где T – период, о численном значении которого можно только догадываться, а $f(\Delta\tau) \geq 0$ – неубывающая функция. Отрицательное значение правой части на отрезке $\Delta\tau \in [T/2+nT, 3T/2+nT]$ следует трактовать как эпохи, для которых возможно однозначное восстановление событий. При этом для эпох $\Delta\tau = nT$ неоднозначность нарастает по мере углубления в прошлое по закону $f(\Delta\tau)$.

Закон (4) очевидным образом выполняется для так называемого пружинного пространства-времени, описывающего эволюцию нашей Вселенной, в пространстве и во времени, и характерным свойством которого является бесконечное обматывание вокруг самого себя в объемлющем пятимерном гиперпространстве [3]. Прошлые эпохи наматываются на современную τ, бесконечно приближаясь к ней с точки зрения наблюдателя, живущего в пятимерном мире. Отсюда видна (почти) периодичность близких к τ эпох $\tau - nT$. Если допустить, что с некоторого момента $\tau - n_0T$ сближение имеет порядок планковской длины $L \sim 10^{-33}cm$, то естественные флюктуации метрики (гравитационного поля) будут вызывать «вспенивание» топологии; начнут срастаться посредством четырехмерных трубок, называемых кротовыми норами, прошлые эпохи $\tau - nT, n > n_0$ и современная τ. При этом на квантовом уровне, т.е. в области микромира, принципиально невозможно различить события прошлого и настоящего. Прошлое перепутано с настоящим. Видимо, такое перемешивание прошлого с настоящим имеет хотя и ограниченную, но все же вполне определенную проекцию на явления (события) из сферы макромира. Это видно из [3], где отмечается, что 4-мерные макрокротовые норы, связывающие прошлое с настоящим, вполне могут образоваться при не слишком сильных возмущениях скалярных полей.

Литература

1. Алексеев В.П. *Этногенез.* – М.: Высшая школа, 1986.

2. Коста де Борегар О. *Второй принцип науки о времени* // Время и современная физика. – М.: Мир, 1970. С.125-138.

3. Гуц А.К. *Многомерная гравитация и машина времени* // Известия вузов. Физика. 1996. N2. С.14-19.

4. Доорн П. *Еще раз о методологии. Старое и прекрасное: «Мыльная опера» о непонимании между историками и моделями* // Информационный бюллетень ассоциации «История и компьютер». Спецвыпуск, посвященный XIV Международной конференции "History and Computing". N19. – М.: МГУ, 1996. С.61-86.

5. Кун Т. *Структура научных революций.* – М.: Мир, 1978.

6. Неретина С.С. *История с методологией истории* // Вопросы философии. 1990. N9. С.149-163.

7. Носовский Г.В., Фоменко А.Т. *Империя.* – М.: Изд-во «Факториал», 1996.

8. Ясперс К. *Смысл и назначение истории.* – М.: Изд-во полит.лит-ры, 1991.

9. *Le Temps et la Pensée Physique contemporaine.* Red. prof.J.L.Rigal. – Paris, Dunod, 1968. – Русский пер.: Время и современная физика / Под ред. и пред. Д.А.Франц-Каменецкого. – М.: Мир, 1970.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.13-19.

УДК 519.62

ПЕРЕНОС КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

А.И. Задорин

The ordinary differential equation of the second order with a small parameter affecting the highest derivative on the infinite interval is considered. Method of the transition of the boundary conditions to the conditions for a finite interval is proposed. The estimates of the replacement error are got.

При математическом моделировании различных физических явлений, таких как распространение примеси от источника, процесс распространения пламени, краевые условия ставятся на бесконечности. При решении дифференциальных уравнений для таких задач конечно-разностным методом необходимо сформулировать граничные условия на границе ограниченной области. При этом требуется оценить погрешность, совершаемую при переносе граничных условий из бесконечности.

В случае полубесконечного интервала вопрос переноса краевого условия из бесконечности рассматривался в ряде работ, например, в [1]. При корректной постановке краевой задачи с предельным условием на бесконечности должно быть гарантировано, что это предельное условие выделяет однопараметрическое семейство решений исходного уравнения и что значения этих решений порождают в окрестности особой точки одномерное устойчивое многообразие. Условие, что значения решений при определенных значениях аргумента принадлежат этому многообразию, дает граничное условие в конечной точке.

В данной работе рассматривается линейное уравнение второго порядка с малым параметром на полубесконечном интервале. Оценена погрешность, возникающая при переносе краевого условия из бесконечности. Показано, как эта погрешность влияет на решение дифференциальной задачи и на решение разностной схемы.

Всюду под C и C_i понимаются положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов разностной сетки. Под нормой функции $p(x)$ подразумевается

E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

$\|p\| = \max|p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \ u(0) = A, \ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{1}$$

Предполагаем достаточную гладкость a, c, f,

$$D \geq a(x) \geq \alpha > 0, \ \varepsilon \in (0,1], \quad B \geq c(x) \geq b > 0,$$
$$f(x) \to 0, \quad a(x) \to a_0, \quad c(x) \to c_0, \quad x \to \infty.$$

Согласно [1], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (1). Остановимся на свойствах решения задачи (1).

Лемма 1. *При всех* $x \geq 0$

$$|u(x)| \leq |A| + ||f(x)/c(x)||. \tag{2}$$

Доказательство. Определим

$$\Psi(x) = |A| + ||f(x)/c(x)|| \pm u(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \ \lim_{x\to\infty} \Psi(x) \geq 0, \ L_\varepsilon \Psi(x) \geq 0, \ 0 < x < \infty.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0, \ x \geq 0$. Это доказывает лемму. ∎

Для решения задачи (1) с помощью разностной схемы необходимо перейти от (1) к краевой задаче на конечном интервале. Согласно подходу [4], краевое условие на бесконечности выделяет одномерное многообразие решений уравнения (1) согласно соотношению:

$$u'(x) = \gamma(x)u(x) + \beta(x), \tag{3}$$

где $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ являются решениями сингулярных задач Коши:

$$R_\varepsilon \gamma = \varepsilon\gamma' - a\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c = 0, \ \lim_{x\to\infty} \gamma(x) = r, \tag{4}$$

где r - отрицательный корень уравнения $\varepsilon r^2 - a_0 r - c_0 = 0$,

$$\varepsilon\beta' - [a(x) - \gamma\varepsilon]\beta = f(x), \ \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0. \tag{5}$$

Можно показать, что

$$\gamma(x) \leq \frac{-2b}{D + \sqrt{D^2 + 4b\varepsilon}}, \ |\gamma(x)| \leq B/\alpha, \ |\beta(x)| \leq \left\| \frac{f(x)}{a(x)} \right\|. \tag{6}$$

Используя (1) и (3), можно получить для произвольного $L \geq 0$ и $x \geq L$:

$$|u(x)| \leq |u(L)| \exp[-\beta_0(x-L)] + \int_L^x |\beta(s)| \exp[-\beta_0(x-s)]ds, \quad \beta_0 > 0,$$

где β_0 соответствует оценке $\gamma(x) \leq -\beta_0$, согласующейся с (6). С учетом (3) задачу (1) можно записать на конечном интервале $[0, L_0]$:

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x),$$

$$u(0) = A, \; u'(L_0) - \gamma(L_0)u(L_0) = \beta(L_0). \tag{7}$$

При переходе от (1) к задаче на конечном интервале $[0, L_0]$ значения $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$ могут быть найдены с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на решение задачи (7).

Итак, рассмотрим краевую задачу с возмущенными значениями $\gamma(L_0)$ и $\beta(L_0)$:

$$-\varepsilon \tilde{u}'' + a(x)\tilde{u}' + c(x)\tilde{u} = f(x),$$

$$\tilde{u}(0) = A, \; \tilde{u}'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\tilde{u}(L_0) = \tilde{\beta}(L_0). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \leq 0, \; |\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \leq \Delta_1, \; |\beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0)| \leq \Delta_2.$$

Тогда при всех $x \in [0, L_0]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \; \varepsilon\alpha^{-1}\{\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)]. \tag{9}$$

Доказательство. Определим $z = u - \tilde{u}$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$L_\varepsilon z = 0, z(0) = 0, z'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)z(L_0) = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))u(L_0).$$

Определим барьерную функцию:

$$\Psi(x) = \{\Delta_2 + \Delta_1|u(L_0)|\}\varepsilon\alpha^{-1}\exp[\varepsilon^{-1}\alpha(x - L_0)] \pm z(x).$$

Тогда

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi'(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi(L_0) \geq 0, \quad L_\varepsilon\Psi(x) \geq 0, \; 0 < x < L_0.$$

Из принципа максимума следует $\Psi(x) \geq 0, \; L_0 \geq x \geq 0$. Теорема доказана. ■

Используя принцип максимума, нетрудно показать, что

$$|\beta(x)| \leq \max_{s \geq L_0} \left|\frac{f(s)}{a(s)}\right| \text{ при } x \geq L_0.$$

На практике часто в точке L_0 задают условие $\tilde{u}'(L_0) = 0$ или $\tilde{u}(L_0) = 0$. В соответствии с доказанной теоремой в случае условия $\tilde{u}'(L_0) = 0$ выполнится оценка:

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq \alpha^{-2}\{\max_{s \geq L_0}|f(s)| + B|u(L_0)|\}\varepsilon\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - L_0)].$$

Нетрудно показать, что в случае условия $\tilde{u}(L_0)=0$ выполнится

$$|u(x)-\tilde{u}(x)| \le |u(L_0)| \exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x-L_0)].$$

Для решения задачи (7) может быть использована разностная схема. Дифференциальное уравнение (7) содержит малый параметр при старшей производной, однако в силу краевого условия пограничный слой для этой задачи слабо выражен - производная $u'(x)$ ограничена равномерно по параметру ε, вторая производная не ограничена равномерно по ε. В соответствии с [5] в случае равномерной сетки схема направленных разностей сходится равномерно по параметру ε с первым порядком. Исследуем устойчивость решения этой схемы к возмущению коэффициентов γ и β.

Итак, на равномерной сетке Ω выпишем схему направленных разностей:

$$L_n^h u^h = -\varepsilon \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} + a_n \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h} + c_n u_n^h = f(x_n),$$

$$u_0^h = A, \ \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma(L_0) u_N^h = \beta(L_0). \tag{10}$$

Пусть $\tilde{u}^h$ - решение схемы (10) в случае возмущенных коэффициентов $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\tilde{\gamma}(L_0) \le 0, \quad |\gamma(L_0)-\tilde{\gamma}(L_0)| \le \Delta_1, \quad |\beta(L_0)-\tilde{\beta}(L_0)| \le \Delta_2.$$

Тогда при всех $n=0,1,...,N$

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le \ (\varepsilon+\alpha h)\alpha^{-1}\{\Delta_2 + \Delta_1 |u_N^h|\} \exp[\alpha(\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \tag{11}$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда z^h является решением задачи:

$$L_n^h z^h = 0, \ z_0^h = 0, \ \frac{z_N^h - z_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}(L_0) z_N^h = \beta(L_0) - \tilde{\beta}(L_0) + (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)) u_N^h.$$

Определим барьерную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \{\Delta_2 + \Delta_1 |u_N^h|\}(\varepsilon+\alpha h)\alpha^{-1}\Phi_n^h \pm z_n^h,$$

где

$$\Phi_n^h = \left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{n-N}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$L_n^h \Psi^h \ge 0, \ n=1,2,...,N-1, \quad \Psi_0^h \ge 0, \quad \frac{\Psi_N^h - \Psi_{N-1}^h}{h} - \tilde{\gamma}(L_0)\Psi_N^h \ge 0.$$

В силу принципа максимума при всех n $\Psi_n^h \ge 0$. Это доказывает теорему. ■

Остановимся на случае краевого условия Неймана $\tilde{u}_N^h = \tilde{u}_{N-1}^h$. В соответствии с теоремой 2 при таком переносе краевого условия из бесконечности выполнится оценка точности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq \ (\varepsilon + \alpha h)\alpha^{-2}\{\max_{s \geq L_0} |f(s)| + B|u_N^h|\} \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)]. \quad (12)$$

В случае условия Дирихле $\tilde{u}_N^h = 0$ справедлива оценка точности:

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \leq |u_N^h| \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)].$$

Остановимся на вопросе приближенного решения задачи (4). Перейдем от (4) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde{\gamma}' - \tilde{a}\tilde{\gamma} + \varepsilon\tilde{\gamma}^2 - \tilde{c} = 0, \ \lim_{x \to \infty} \tilde{\gamma}(x) = r. \quad (13)$$

Предполагаем, что

$$\tilde{a}(x) \to a_0, \ \tilde{c}(x) \to c_0, \ x \to \infty, \ \tilde{a} \geq \tilde{\alpha} > 0, \ \tilde{c} \geq \tilde{b} > 0.$$

Понятно, что (13) является аналогом уравнения (4) в случае возмущенных коэффициентов в уравнении (1), поэтому $\tilde{\gamma}(x) \leq 0, \ |\tilde{\gamma}(x)| \leq \tilde{B}/\tilde{\alpha}$.

Пусть

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \leq \Delta, \ |c(x) - \tilde{c}(x)| \leq \Delta. \text{ для } x \geq L_0.$$

Покажем, что тогда найдется C:

$$|\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)| \leq C\Delta \text{ для } x \geq L_0. \quad (14)$$

Пусть $z = \gamma - \tilde{\gamma}$. Тогда

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z' - [a - \varepsilon(\gamma + \tilde{\gamma})]z = c - \tilde{c} + (a - \tilde{a})\tilde{\gamma}, \quad \lim_{x \to \infty} z(x) = 0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно показать:

$$|z(x)| \leq \Delta\alpha^{-1}(1 + \|\tilde{c}\|\tilde{\alpha}^{-1}) \text{ при } x \geq L_0,$$

откуда следует (14).

Если при достаточно больших x справедливы представления:

$$a(x) \approx \tilde{a}(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^{-i}, \ c(x) \approx \tilde{c}(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i x^{-i}, \quad (15)$$

то $\gamma(x)$ может быть приближенно найдено в виде [3]:

$$\gamma(x) \approx \tilde{\gamma}(x) = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i x^{-i}.$$

Для этого необходимо подставить разложения a, c в (4) и получим рекуррентную формулу относительно γ_i.

Для приближенного нахождения $\gamma(x)$ можно использовать малость параметра ε. Пусть $\gamma_0(x)$ - отрицательное решение уравнения:

$$-a(x)\gamma_0(x) + \varepsilon\gamma_0^2(x) - c(x) = 0.$$

Лемма 2. *Найдется C такое, что при всех x* $|\gamma(x)-\gamma_0(x)|\le C\varepsilon.$

Доказательство. Пусть $z=\gamma-\gamma_0$. Тогда

$$T_\varepsilon z=\varepsilon z'-az=\varepsilon(\gamma_0^2-\gamma^2)+R_\varepsilon\gamma-R_\varepsilon\gamma_0,\ \lim_{x\to\infty}z(x)=0,$$

где R_ε соответствует (4). Для оператора T_ε справедлив принцип максимума:

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x)\ge 0,\ T_\varepsilon\Psi(x)\le 0,\ x<\infty\Rightarrow\Psi(x)\ge 0.$$

Определим

$$\Psi(x)=\alpha^{-1}\|\varepsilon(\gamma_0^2-\gamma^2)-\varepsilon\gamma_0'\|\pm z(x).$$

В силу принципа максимума

$$|z(x)|\le\varepsilon\alpha^{-1}\|\gamma_0^2-\gamma^2-\gamma_0'\|. \tag{16}$$

Функция $\gamma_0(x)$ ограничена вместе с производной равномерно по ε. Учитывая, что $|\gamma(x)|\le C$, из (16) получим утверждение леммы. ■

Теперь остановимся на вопросе нахождения $\beta(x)$ из (5). Перейдем от (5) к уравнению с возмущенными коэффициентами:

$$\varepsilon\tilde\beta'-[\tilde a(x)-\tilde\gamma\varepsilon]\tilde\beta=\tilde f(x),\ \lim_{x\to\infty}\tilde\beta(x)=0. \tag{17}$$

Предполагаем, что

$$\tilde a(x)\to a_0,\ \tilde\gamma(x)\to r,\ \tilde f(x)\to 0,\ x\to\infty,\ \tilde a\ge\tilde\alpha>0,\tilde\gamma(x)\le 0.$$

Пусть для $x\ge L_0$

$$|a(x)-\tilde a(x)|\le\Delta,\ |f(x)-\tilde f(x)|\le\Delta,\ |\gamma(x)-\tilde\gamma(x)|\le\Delta_1.$$

Покажем, что тогда найдется C:

$$|\beta(x)-\tilde\beta(x)|\le C[\Delta+\Delta_1\varepsilon]\ \text{ для } x\ge L_0. \tag{18}$$

Пусть $z=\beta-\tilde\beta$. Тогда

$$R_\varepsilon z=\varepsilon z'-[a-\varepsilon\gamma]z=f-\tilde f+\tilde\beta(a-\tilde a)+\tilde\beta\varepsilon(\tilde\gamma-\gamma),\ \ \lim_{x\to\infty}z(x)=0.$$

Применяя принцип максимума к оператору R_ε, нетрудно получить оценку (18).

При достаточно больших x функция $\beta(x)$ может быть найдена на основе разложения коэффициентов $a,\ \gamma,\ f$ в ряд по степеням x^{-1} по аналогии с $\gamma(x)$.

Для нахождения $\beta(x)$ можно использовать и малость параметра ε. Пусть

$$\beta(x)\approx\sum_{n=0}^{N}\beta_n\varepsilon^n.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (5), получим:

$$\beta_{n+1} = \frac{\beta_n' + \gamma\beta_n}{a}, \quad \beta_0(x) = -\frac{f(x)}{a(x)}.$$

На основании принципа максимума нетрудно показать, что для некоторой постоянной C при всех x

$$\left|\beta(x) - \sum_{n=0}^{N} \beta_n \varepsilon^n\right| \le C\varepsilon^{N+1}.$$

Литература

1. Клоков Ю.А. *Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики.* – Рига, 1963.

2. Абрамов А.А. *О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. N 3. С.542-545.

3. Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. *О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5. N 6. С.979-990.

4. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

5. Задорин А.И. *Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем* // Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО РАН СССР, 1991. Т.5. N 1. С.141-152.

6. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1983.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.20-26.

УДК 519.1

СТРУКТУРА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН РЕЛАКСАЦИИ МНОГОГРАННИКА K-ФАКТОРОВ

Р.Ю.Симанчёв

In this paper the graph structure of the k–factor polytope vertices is described.

1. Введение

В ряде алгоритмов комбинаторной оптимизации широко используется информация о полиэдральной структуре выпуклых оболочек допустимых решений рассматриваемых задач. Широкий класс образуют экстремальные задачи в следующей постановке. Пусть E – конечное множество; $c : E \to R$ – аддитивный функционал на E; $\Im \subseteq 2^E$ – некоторое семейство подмножеств множества E. Требуется найти такой $H^* \in \Im$, что $c(H^*) \geq c(H)$ для любого $H \in \Im$. Полиэдральный подход к анализу и решению такой задачи заключается в сопоставлении ей специального $(0,1)$-многогранника и исследовании полиэдральной и комбинаторной структуры последнего (см., напр., [1]). Множеству E сопоставим евклидово пространство R^E, имея ввиду взаимнооднозначное соответствие между E и множеством координатных осей пространства R^E, после чего для любого $F \in 2^E$ определим его *вектор инциденций* $x^F \in R^E$ как вектор-столбец с компонентами $x^F_e = 1$ при $e \in F$, $x^F_e = 0$ при $e \notin F$. Таким образом, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между 2^E и множеством вершин единичного куба в R^E. Теперь положим

$$P(\Im) = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \Im\}.$$

В силу аддитивности, функционал $c : E \to R$ естественным образом ассоциируется с линейным функционалом $f_c : R^E \to R$, причем $c(F) = f_c(x^F)$ для любого $F \subseteq E$.

Как уже говорилось, полиэдральная структура многогранника $P(\Im)$ играет существенную роль при разработке алгоритмов решения задачи. Например, полное или частичное линейное описание многогранника $P(\Im)$ позволяет применять для решения задачи аппарат линейного и целочисленного линейного

E-mail: siman@univer.omsk.su

программирования [1]; диаметр $P(\Im)$ может служить оценкой числа итераций «наилучшей» симплексной процедуры; классы смежных вершин весьма полезны при разработке алгоритмов локальной оптимизации. На этом этапе существенную роль начинает играть удачный выбор релаксационного множества для многогранника $P(\Im)$, то есть такого многогранного множества $M(\Im)$ (имеющего, в определенном смысле, «более простую» структуру, чем $P(\Im)$), что $P(\Im) \subseteq M(\Im)$. Если при этом $M(\Im) = \{x \in R^E \mid Ax \leq b\}$, где A — $(n \times |E|)$–матрица и b — n–вектор, то $M(\Im)$ мы будем называть *полиэдральной релаксацией* многогранника $P(\Im)$. В отличие от $P(\Im)$, множество $M(\Im)$ может иметь нецелочисленные или иные «лишние» (в смысле описанной выше экстремальной задачи) вершины. Структура последних играет важную роль при генерировании отсекающих плоскостей и при решении задачи их идентификации (см., например, [2, 3].

В настоящей работе описана графовая структура вершин полиэдральной релаксации многогранника k-факторов полного графа.

Нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Выпуклым многогранником (или просто *многогранником*) в пространстве R^d называется выпуклая оболочка конечного множества точек этого пространства. Мы определим *полиэдр* в d-мерном вещественном пространстве как множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств относительно d переменных, если оно ограничено. Согласно теореме Вейля-Минковского, для всякого выпуклого многогранника P существует такой полиэдр F, что $P = F$. Верно и обратное: всякий полиэдр является многогранником. *Гранью* многогранника P называется множество $\{x \in P \mid a^T x = a_0\}$, где $a^T x \leq a_0$ – опорное к P неравенство. Грань называется *p-гранью*, если ее размерность равна p, 0-грани называются *вершинами*. Ясно, что если P – полиэдр, то $x \in P$ является вершиной тогда и только тогда, когда ранг подматрицы ограничений, обращаемых точкой x в равенство, равен d.

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множествами вершин V и ребер E, $\mid V \mid = n$. Для всякого $G \in K_n$ через VG и EG обозначим соответственно множества вершин и ребер графа G. При этом для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, понимая $u, v \in V$ как пару инцидентных ребру e вершин. Для $W \subseteq V$ положим

$$E_G(W) \equiv E_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u, v \in W\},$$

$$\delta_G(W) \equiv \delta_{EG}(W) = \{uv \in EG \mid u \in W, v \notin W\}.$$

Степенью относительно G (или EG) произвольной вершины $u \in V$ назовем величину $d_G(u) \equiv d_{EG}(u) = \mid \delta_G(u) \mid$. Если $G = K_n$, то в обозначениях $E_G(W)$, $\delta_G(W)$ и $d_G(u)$ символ "G" будем опускать. Всякое $R \subset E$ *индуцирует* некоторый подграф T, у которого $ET = R$ и VT – множество вершин из V, инцидентных ребрам множества R. В этой связи, там, где не возникает двусмысленности, граф, индуцированный множеством ребер R, будем просто обозначать через R. Для пары графов $G, F \subset K_n$ под $G \cup F$ будем понимать такой граф H, что $VH = VG \cup VF$ и $EH = EG \cup EF$, а под $G \cap F$ – граф, индуцированный множеством ребер $EG \cap EF$. И наконец, *простым циклом* назовем такой связный подграф $C \subset K_n$, что $d_C(u) = 2$ для всех $u \in VC$. При этом простой цикл будем также задавать либо последовательным списком вершин, либо последовательным списком ребер.

Для $x \in R^E$ и $R \subseteq E$ определим линейную форму

$$x(R) = \sum_{e \in R} x_e.$$

2. Полиэдральная релаксация

На протяжении всей статьи $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных ребер. Выберем такое натуральное k, что $1 \le k \le n-1$ и kn – четно. Под *k-фактором* графа K_n будем понимать остовный однородный степени k подграф. Обозначим через $\beta^*_{k,n}$ – множество всех k-факторов, а через $\beta_{k,n}$ – множество всех связных k-факторов графа K_n. Заметим, что, например, $\beta_{2,n}$ – множество гамильтоновых циклов, а $\beta^*_{1,n}$ – множество совершенных паросочетаний полного графа. Сопоставим множеству E евклидово пространство R^E, а каждому $F \subset K_n$ – его вектор инциденций $x^F \equiv x^{EF} \in R^E$ так, как это описано выше. Пусть

$$P^*_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta^*_{k,n}\},$$

$$P_{k,n} = conv\{x^H \in R^E \mid H \in \beta_{k,n}\}$$

– многогранники k-факторов и связных k-факторов соответственно.

С графом K_n свяжем его вершинно-реберную матрицу инциденций A. Структура матрицы A такова: строки соответствуют элементам множества V, а столбцы – элементам множества E, и при этом в клетке (u, e) стоит 1, если вершина u инцидентна ребру e, и – 0 в противном случае. Легко заметить, что A состоит из всевозможных столбцов с двумя единицами и $(n-2)$ нулями. Матрицу инциденций произвольного $F \subset K_n$ обозначим через $A(F)$. Она, очевидно, является подматрицей матрицы A, образованной пересечением строк VF и столбцов EF.

Положим

$$M_{k,n} = \{x \in R^E \mid Ax = \overline{k},\ \ \overline{0} \le x \le \overline{1}\},$$

где $\overline{k}$ – вектор-столбец с n компонентами, равными k, $\overline{0}$ и $\overline{1}$ аналогично. В терминах K_n система, определяющая $M_{k,n}$, может быть записана в виде

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in V, \tag{2.1}$$

$$0 \le x_e \le 1, \quad e \in E. \tag{2.2}$$

Нетрудно заметить, что вектор инциденций любого k-фактора удовлетворяет системе (2.1) – (2.2). Следовательно, множество $M_{k,n}$ можно рассматривать как полиэдральную релаксацию многогранников $P^*_{k,n}$ и $P_{k,n}$. В [4] показано, что система уравнений (2.1) определяет аффинную оболочку многогранников $P^*_{k,n}$ и $P_{k,n}$. Так как $M_{k,n}$ есть подмножество единичного куба в R^E, то $vertP_{k,n} \subset vertP^*_{k,n} \subset vertM_{k,n}$.

Следующий пример показывает, что $M_{k,n}$ имеет нецелочисленные вершины.

Пример. Пусть $n = 6$, $k = 2$ и, соответственно, $V = \{1,\ldots,6\}$, $E = \{ij$, где $i,j = 1,\ldots,6\}$. Определим в K_6 два подграфа: $C = (V, \{12, 13, 23, 45, 46, 56\})$ и $T = (V, \{16, 24, 35\})$. Рассмотрим точку $\overline{x} \in R^E$ с координатами $\overline{x}_{ij} = \frac{1}{2}$ при $ij \in EC$, $\overline{x}_{ij} = 1$ при $ij \in ET$, $\overline{x}_{ij} = 0$ в остальных случаях. Покажем, что $\overline{x} \in vertM_{2,6}$.

Действительно, легко проверяется, что $\overline{x} \in M_{2,6}$. Точка $\overline{x}$ обращает в равенство следующие ограничения из (2.1) – (2.2)

$$\overline{x}(\delta(i)) = 2 \text{ при } i = 1, 2, \ldots 6, \tag{2.3}$$

$$\overline{x}_{ij} = 1 \text{ при } ij \in ET, \quad \overline{x}_{ij} = 0 \text{ при } ij \in E \setminus (ET \cup EC). \tag{2.4}$$

Вычислим ранг этой подсистемы. Ее матрицу обозначим через D. Матрица D квадратная порядка 15. Раскрывая ее определитель по строкам, содержащим по одной единице, то есть по строкам, соответствующим ограничениям (2.4), получим, что $\mid \det D \mid = \mid \det A(C) \mid = 4$. Таким образом, D – квадратная невырожденная матрица и, следовательно, $\overline{x} \in vertM_{2,6}$.

3. Структура нецелочисленных вершин полиэдра $M_{k,n}$

Пусть $\overline{x} \in M_{k,n}$. С точкой $\overline{x}$ свяжем следующие подграфы:

$C_{\overline{x}}$ – *граф дробности* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $EC_{\overline{x}} = \{e \in E \mid 0 < \overline{x}_e < 1\}$;

$T_{\overline{x}}$ – *граф единиц* точки $\overline{x}$ – индуцирован множеством ребер $ET_{\overline{x}} = \{e \in E \mid \overline{x}_e = 1\}$.

Лемма 3.1. *Если $\overline{x}$ – нецелочисленная вершина полиэдра $M_{k,n}$, то ее граф дробности $C_{\overline{x}}$ есть объединение простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов.*

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на четыре части. Мы покажем, что 1) $\mid EC_{\overline{x}} \mid \leq n$; 2) $d_{C_{\overline{x}}}(u) \geq 2$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$; 3) $\mid EC_{\overline{x}} \mid = \mid VC_{\overline{x}} \mid$ и 4) граф $C_{\overline{x}}$ не содержит четных циклов.

Так как $\overline{x}$ – вершина, то она обращает в равенство ограничения некоторой квадратной невырожденной подсистемы системы (2.1) – (2.2):

$$x(\delta(u)) = k \text{ при } u \in V', \tag{3.1}$$

$$x_e = 1 \text{ при } e \in E', \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E'', \tag{3.2}$$

$\mid V' \mid + \mid E' \mid + \mid E'' \mid = \frac{n^2-n}{2}$. Так как $\mid V' \mid \leq n$, то ограничений (3.2) в этой подсистеме будет не менее, чем $\frac{n^2-n}{2} - n$. Каждое из них означает целочисленность соответствующей компоненты. Значит, нецелочисленных компонент может быть не более, чем n. 1) доказано.

2) По условию, $C_{\overline{x}} \neq \emptyset$. Предположим, что $d_{C_{\overline{x}}}(u') = 1$ для некоторой $u' \in VC_{\overline{x}}$. Рассмотрим ограничение $x(\delta(u')) = k$, входящее в (3.1). Из предположения следует, что для любого $e \in \delta(u') \setminus \{e'\}$, где $\{e'\} = \delta(u') \cap EC_{\overline{x}}$, справедливо $\overline{x}_e \in \{0,1\}$. Но тогда $\overline{x}(\delta(u')) = \overline{x}_{e'} + \overline{x}(\delta(u') \setminus \{e'\})$ – нецелочисленно, то есть точка $\overline{x}$ не удовлетворяет условию $x(\delta(u')) = k$ и, следовательно, не лежит в $M_{k,n}$. Противоречие.

3) Заметим, что $\mid V' \mid \geq \mid EC_{\overline{x}} \mid$. Действительно, в подсистеме (3.2) нет уравнений, соответствующих ребрам множества $EC_{\overline{x}}$. Если раскрыть определитель системы (3.1) – (3.2) по строкам, соответствующим уравнениям (3.2), то получится определитель порядка $\mid V' \mid$, который, разумеется, не равен нулю. При этом ни один из столбцов, соответствующих ребрам $EC_{\overline{x}}$, не будет вычеркнут. Следовательно, $\mid V' \mid \geq \mid EC_{\overline{x}} \mid$.

Пусть $\overline{E} = E \setminus (E' \cup E'')$. Тогда подматрица A' матрицы системы (3.1)–(3.2), образованная строками коэффициентов уравнений (3.1) и столбцами, соответствующими множеству $\overline{E}$, является квадратной невырожденной матрицей, ибо получена путем раскрытия определителя системы (3.1) – (3.2) по строкам $E' \cup E''$. Ясно, что $EC_{\overline{x}} \subseteq \overline{E}$. Пусть $W = V' \cap VC_{\overline{x}}$. Матрицу A' можно схематично изобразить так, как показано на рисунке:

$$\begin{array}{c|c:c|}
 & EC_{\overline{x}} & \overline{E} \setminus EC_{\overline{x}} \\
\hline
W & A_1 & A_2 \\
\hdashline
V' \setminus W & A_3 & A_4 \\
\hline
\end{array}$$

Так как среди вершин множества $V' \setminus W$ нет инцидентных ребрам из $EC_{\overline{x}}$, то подматрица A_3 состоит целиком из нулей. Предположим, что $\mid EC_{\overline{x}} \mid > \mid VC_{\overline{x}} \mid$. Тогда $\mid EC_{\overline{x}} \mid > \mid W \mid$ и, следовательно, $\mid V' \setminus W \mid > \mid \overline{E} \setminus EC_{\overline{x}} \mid$, то есть в подматрице A_4 строк больше, чем столбцов. Значит, среди строк матрицы A_4 имеются линейно зависимые. Последнее, в силу того, что A_3 нулевая, означает, что A' содержит линейно зависимые строки, что противоречит ее невырожденности. Таким образом,

$$\mid EC_{\overline{x}} \mid \leq \mid W \mid \leq \mid VC_{\overline{x}} \mid . \tag{3.3}$$

Так как $d_{C_{\overline{x}}} \geq 2$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$, то $\mid EC_{\overline{x}} \mid = \mid VC_{\overline{x}} \mid$.

И наконец, 4). Из 3) и (3.3) следует, что матрица A_1 является вершинно-реберной матрицей инциденций графа $C_{\overline{x}}$, причем – квадратной. Так как A_3

нулевая, то матрица A' – полураспавшаяся и $\det A' = \det A_1 \cdot \det A_4 \neq 0$. Следовательно, $\det A_1 \neq 0$. Так как $C_{\overline{x}}$ – набор непересекающихся циклов, то перестановкой строк и столбцов матрица A_1 может быть приведена к клеточно-диагональному виду, причем каждая клетка является вершинно-реберной матрицей инциденций некоторого цикла из $C_{\overline{x}}$. Значит, $\det A_1 = \det A_{11} \cdot \det A_{12} \cdot \ldots \det A_{1t}$, где A_{1i}, $i = 1, \ldots, t$, – те самые клетки. Легко показать, что если простой цикл четен, то определитель его матрицы равен нулю.

Лемма доказана. ■

Лемма 3.2. *Если $\overline{x}$ – нецелочисленная вершина полиэдра $M_{k,n}$, то $\overline{x}_e = \frac{1}{2}$ для всех $e \in EC_{\overline{x}}$.*

Доказательство. Действительно, пусть C – какой-либо цикл графа $C_{\overline{x}}$. Положим $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$, $e_i = u_i u_{i+1}$, $i = 1, \ldots, t-1$, $e_t = u_1 u_t$. Так как $\overline{x}_{e_i} \neq 0$, то $\overline{x}_{e_i} + \overline{x}_{e_{i+1}} = 1$. Предположим, что $\overline{x}_{e_1} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тогда $\overline{x}_{e_2} = \frac{1}{2} - \varepsilon, \ldots, \overline{x}_{e_{2l-1}} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\overline{x}_{e_{2l}} = \frac{1}{2} - \varepsilon, \ldots, \overline{x}_{e_t} = \frac{1}{2} + \varepsilon$, (так как t – нечетно). Отсюда $\overline{x}_{e_1} + \overline{x}_{e_t} = 1 + 2\varepsilon > 1$, чего быть не может, ибо это означает, что $d_{C_{\overline{x}}}(u_1) > 2$. ■

Лемма 3.3. *Пусть набор C простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов и граф $T \subset K_n$ таковы, что $ET \cap EC = \emptyset$, $d_T(u) = k - 1$ при $u \in VC$ и $d_T(u) = k$ при $u \notin VC$. Тогда точка $\overline{x} \in R^E$ с координатами*

$$\overline{x}_e = \begin{cases} \frac{1}{2}, & e \in EC, \\ 1, & e \in ET, \\ 0, & e \in E \setminus (EC \cup ET), \end{cases}$$

является вершиной полиэдра $M_{k,n}$.

Доказательство. Очевидно, что $\overline{x} \in M_{k,n}$. Точка $\overline{x}$ обращает в равенство следующие ограничения системы (2.1) – (2.2):

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in V,$$
$$x_e = 1 \text{ при } e \in ET, \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E \setminus (EC \cup ET), \tag{3.4}$$

Вычислим ранг этой подсистемы. Всякое уравнение $x(\delta(u)) = k$ при $u \notin VC$ является линейной комбинацией уравнений (3.4), поэтому эти уравнения можно отбросить. Таким образом, нужно вычислить ранг системы

$$x(\delta(u)) = k, \quad u \in VC,$$

$$x_e = 1 \text{ при } e \in ET, \quad x_e = 0 \text{ при } e \in E \setminus (EC \cup ET),$$

Заметим, что так как $| VC | = | EC |$, то эта система квадратная (ибо $| VC | + | ET | + \frac{n^2-n}{2} - (| EC | + | ET |) = \frac{n^2-n}{2}$). Раскрывая определитель этой системы по строкам, соответствующим уравнениям (3.4), мы получим, что он равен определителю вершинно-реберной матрицы инциденций набора циклов C, который не равен нулю, в силу нечетности циклов. Лемма доказана. ■

Ясно, что в условиях леммы 3.3 граф C является графом дробности точки $\overline{x}$, а граф T – ее графом единиц. Кроме того, так как число вершин нечетной степени во всяком графе четно, то при четном k непременно $\mid VC \mid$ четно. Это следует из того, что $VC = \{u \in VT \mid d_T(u) = k-1\}$. Если же k нечетно, то $\mid V \setminus VC \mid = \mid \{u \in VT \mid d_T(u) = k\} \mid$ – четно и, так как при этом n обязательно четно, вновь имеем четность величины $\mid VC \mid$.

Результаты этого параграфа сформулируем в виде теоремы.

Теорема . *Точка $\overline{x} \in M_{k,n}$ является вершиной полиэдра $M_{k,n}$ тогда и только тогда, когда она целочисленна, либо ее граф дробности $C_{\overline{x}}$ и граф единиц $T_{\overline{x}}$ удовлетворяют условиям:*
1) $C_{\overline{x}}$ есть объединение четного числа простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов, причем для любого $e \in EC_{\overline{x}}$ имеет место $\overline{x}_e = \frac{1}{2}$;
2) $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k-1$ для всех $u \in VC_{\overline{x}}$ и $d_{T_{\overline{x}}}(u) = k$ для всех $u \in V \setminus VC_{\overline{x}}$.

Литература

1. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования:* В 2-х т. М.: Мир, 1991.

2. Padberg M.W., Rinaldi G. *Facet identification for the symmetric travelling salesman problem* // Math, Programming. 1990. N 47. P.219-257.

3. Дергунова Т.В., Симанчёв Р.Ю. *Задача о связном k–факторе: идентификация фасет и алгоритм отсечения* // Фунд. и прикл. матем. Омск, ОмГУ, 1994. С.71-80.

4. Симанчев Р.Ю. *О ранговых неравенствах, порождающих фасеты многогранника связных k–факторов* // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т.3. N 3. С.84-110.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.27-32.

УДК 519.1

АФФИННЫЕ СИММЕТРИИ МНОГОГРАННИКА СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМОСТИ

О.В. Червяков

In the present work in the terms of inseparable sets is received criterion of existence of symmetry of independence system polyhedron for any shift. On the basis of it is developed polynomial (accurate to oracle of independence) algorithm of construction of the appropriate symmetry.

1. Введение

Пусть $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – множество мощности n. *Системой независимости* на множестве E называется непустое семейство $\mathcal{J}$ его подмножеств, удовлетворяющее условию: если $J \in \mathcal{J}$ и $I \subseteq J$, то $I \in \mathcal{J}$. Множества семейства $\mathcal{J}$ называется *независимыми множествами.*

Пусть R^E – евклидово пространство, ассоциированное с E посредством взаимооднозначного соответствия между множеством координатных осей пространства R^E и множеством E. Иными словами, R^E можно понимать как совокупность вектор-столбцов размерности n с вещественными компонентами, индексированными элементами множества E. Всякому $S \subseteq E$ сопоставим его *вектор инциденций* по правилу: $x_e^S = 1$ при $e \in S$, $x_e^S = 0$ при $e \notin S$. Очевидно, что это правило задает взаимооднозначное соответствие между 2^E и вершинами единичного куба в R^E. *Многогранник системы независимости* $\mathcal{J}$ определим как $P(\mathcal{J}) = Conv(x^I \mid I \in \mathcal{J})$ [5]. Ясно, что векторы инциденций независимых множеств $\mathcal{J}$ и только они являются вершинами многогранника $P(\mathcal{J})$.

Пусть $P \subset R^E$ – произвольный многогранник. *Симметрией многогранника* P назовем такое невырожденное аффинное преобразование φ пространства R^E, что $\varphi(P) \equiv \{\varphi(x) \mid x \in P\} = P$. Как известно, всякое невырожденное аффинное преобразование φ определяется невырожденной $(n \times n)$-матрицей A и сдвигом $h \in R^E$, то есть $\varphi(x) = Ax + h$ при $x \in R^E$ [1]. Очевидно, что невырожденное аффинное преобразование ψ пространства R^E является симметрией

E-mail: cherv@univer.omsk.su

многогранника $P(\mathcal{J})$ тогда и только тогда, когда для любого $I \in \mathcal{J}$ существует такое $J \in \mathcal{J}$, что $\psi(x^I) = x^J$.

Симметрию с нулевым сдвигом будем называть *линейной симметрией*. Очевидно, что множество всех симметрий многогранника P является группой относительно суперпозиции отображений, а множество линейных симметрий – ее подгруппой. Группу всех симметрий многогранника $P(\mathcal{J})$ мы будем обозначать через $S(\mathcal{J})$, а ее подгруппу линейных симметрий – через $L(\mathcal{J})$.

Пусть $H \in \mathcal{J}$. *H-отображением* будем называть линейное невырожденное преобразование ψ пространства R^E, удовлетворяющее условию: для любого $I \in \mathcal{J}$ существует такое $J \in \mathcal{J}$, что $\psi(x^I) = x^{J \triangle H}$, где под $J \triangle H$ подразумевается симметрическая разность множеств J и H. Положим $\mathcal{J} \triangle H \equiv \{I \triangle H \mid I \in \mathcal{J}\}$. Так как $|\mathcal{J} \triangle H| = |\mathcal{J}|$, то невырожденное преобразование ψ является H-отображением, если и только если $\psi^{-1}(x^J)$ для любого $J \in \mathcal{J} \triangle H$ является вектором инциденций независимого множества.

В [4] были получены следующие результаты о структуре группы $S(\mathcal{J})$. Группу $S(\mathcal{J})$ можно разбить на непересекающиеся классы $\{S_H\}_{H\in\mathcal{J}}$, где S_H – класс симметрий многогранника $P(\mathcal{J})$, имеющих сдвиг x^H. Это позволяет свести описание группы $S(\mathcal{J})$ к описанию классов $\{S_H\}_{H\in\mathcal{J}}$. Каждый класс S_H является левым классом смежности группы $S(\mathcal{J})$ по подгруппе $L(\mathcal{J})$. Следовательно класс S_H можно получить, зная хотя бы одного его представителя и подгруппу $L(\mathcal{J})$. Исследования последней проводились ранее в [3] для системы независимости и, в частности, для матроида, и в [2] – для семейства паросочетаний. Преобразование $\varphi \in S_H$, если и только если $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, где

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1-2x_1^H & & & \\ & 1-2x_2^H & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-2x_n^H \end{pmatrix} x + x^H,$$

а φ_2 – H-отображение. Причем H-отображение существует тогда и только тогда, когда $S_H \neq \emptyset$. Таким образом, для описания класса S_H достаточно знать какое-либо H-отображение.

В настоящей работе в терминах неразделимых множеств получен критерий существования H-отображения для произвольного $H \in \mathcal{J}$. На основании этого, если S_H не пуст, разработан полиномиальный (с точностью до оракула независимости) алгоритм построения соответствующего H-отображения.

Ниже приведены понятия и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $\mathcal{M}$ – семейство подмножеств из E. Множество $I \in \mathcal{M}$ называется *разделимым относительно* $\mathcal{M}$, если существует такое множество $S \subset I$, что $S \neq \emptyset$, $I \setminus S \neq \emptyset$ и $S, I \setminus S \in \mathcal{M}$. В противном случае оно называется *неразделимым*. Понятно, что в случае системы независимости неразделимыми множествами относительно $\mathcal{J}$ будут только множества, состоящие из одного элемента.

Пусть $I \in \mathcal{M}$ – разделимое множество относительно $\mathcal{M}$. *Разделением* множества I *относительно* множества $\mathcal{M}$ называется семейство, по крайней мере двух, непустых попарно не пересекающихся подмножеств множества I, принадлежащих $\mathcal{M}$, объединение которых равно I. Очевидно, что для каждого разделимого множества I существует разделение, элементами которого являются только неразделимые множества. Такое разделение мы будем называть *простым разделением.*

Для каждого $e \in E$ и $H \in \mathcal{J}$ определим класс $\mathcal{I}_e^H$ множеств $\{e\} \cup (H \setminus B)$, где B – максимальное по включению множество, удовлетворяющее следующим условиям: $\{e\} \cup B \in \mathcal{J}$, $B \subseteq H$. Очевидно, что каждый класс $\mathcal{I}_e^H$ не пуст. Понятно также, что если $e \in H$, то $\mathcal{I}_e^H$ состоит из единственного множества $\{e\}$, а если $e \notin H$, то множества из класса $\mathcal{I}_e^H$ имеют вид $\{e\} + D$, где D – некоторое подмножество H. Поэтому никакие два множества из разных классов не равны.

Без ограничения общности будем считать, что размерность многогранника P равна n, ибо в противном случае существует элемент $e \in E$, не содержащийся ни в каком независимом множестве и, следовательно, вместо E можно рассматривать множество $E \setminus \{e\}$.

2. Критерий существования H-отображения

Итак, пусть у нас зафиксирована система независимости $\mathcal{J}$ на множестве $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Лемма 1. *Пусть φ – H-отображение и $I \in \mathcal{J}$, $J \in \mathcal{J} \triangle H$ такие, что $\varphi(x^I) = x^J$. Тогда I является неразделимым относительно $\mathcal{J}$, если и только если J неразделимо относительно $\mathcal{J} \triangle H$.*

Доказательство. Пусть I разделимо относительно $\mathcal{J}$, и $\{T,\ I \setminus T\}$ – его разделение. Тогда

$$\varphi(x^I) = \varphi(x^T + x^{I \setminus T}) = \varphi(x^I) + \varphi(x^{I \setminus T}) = x^{J_1} + x^{J_2} = x^{J_1 + J_2} = x^J,$$

где $\{J_1, J_2\}$ есть разделение множества J относительно $\mathcal{J} \triangle H$, в силу невырожденности φ.

Пусть J – разделимо относительно $\mathcal{J} \triangle H$ и $\{T,\ J \setminus T\}$ – его разделение. Тогда

$$\varphi^{-1}(x^J) = \varphi^{-1}(x^T + x^{J \setminus T}) = \varphi^{-1}(x^J) + \varphi^{-1}(x^{J \setminus T}) = x^{I_1} + x^{I_2} = x^{I_1 + I_2} = x^I,$$

где $\{I_1, I_2\}$ есть разделение множества I относительно $\mathcal{J}$. ■

Лемма 2. *Каждый класс $\mathcal{I}_e^H$ содержит только неразделимые относительно $\mathcal{J} \triangle H$ множества.*

Доказательство. Пусть $J = \{e\} \cup (H \setminus B) \in \mathcal{I}_e^H$ (B – максимальное по включению множество, удовлетворяющее условиям: $B \subseteq H$ и $\{e\} \cup B \in \mathcal{J}$). По построению множества J ясно, что оно принадлежит $\mathcal{J} \triangle H$. Допустим, что оно разделимо относительно $\mathcal{J} \triangle H$ и $\sigma = \{T, I \setminus T\}$ – его разделение. Так как $e \in J$, то, без ограничения общности, можно считать, что $e \in T$. Тогда $J \setminus T \subseteq H$, как легко убедиться прямыми вычислениями, $\{e\} \cup B \cup (J \setminus T) \in \mathcal{J}$. Следовательно, так как $J \setminus T \neq \emptyset$ и $B \cap (J \setminus T) = \emptyset$, то B – собственное подмножество $B \cup (J \setminus T)$. Это противоречит выбору B. ■

Теорема (Критерий существования H-отображения). *Пусть $\mathcal{J}$ – система независимости на E, $H \in \mathcal{J}$. Для существования H-отображения необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

(A) Число неразделимых относительно $\mathcal{J} \bigtriangleup H$ множеств равно n;

(B) Пусть σ – разделение множества $J \in \mathcal{J} \bigtriangleup H$ относительно $\mathcal{J} \bigtriangleup H$. Тогда любое объединение элементов σ принадлежит $\mathcal{J} \bigtriangleup H$.

Доказательство. Необходимость. Условие (A) следует из леммы 1 и того, что неразделимыми относительно $\mathcal{J}$ будут только одноэлементные множества, которых n штук. Докажем условие (B). Пусть φ – H-отображение и $\sigma = \{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$. Без ограничения общности рассмотрим объединение первых p элементов разбиения σ. Если $p = k$, то условие доказано. Иначе:

$$\varphi^{-1}(x^J) = \varphi^{-1}(x^{J_1 + \ldots + J_p + J_{p+1} + \ldots + J_k}) =$$

$$= \varphi^{-1}(x^{J_1}) + \ldots + \varphi^{-1}(x^{J_p}) + \varphi^{-1}(x^{J_{p+1}}) + \ldots + \varphi^{-1}(x^{J_k}) =$$
$$= x^{I_1} + \ldots + x^{I_p} + x^{I_{p+1}} + \ldots + x^{I_k} = x^{I_1 + \ldots + I_p + I_{p+1} + \ldots + I_k} = x^I,$$

где $I \in \mathcal{J}$. Так как любое объединение подмножеств независимого множества независимо, то

$$\bigcup_{i=\overline{1,p}} I_i \in \mathcal{J} \text{ и}$$

$$\varphi(x^{I_1 + \ldots + I_p}) = \varphi(x^{I_1}) + \ldots + \varphi(x^{I_p}) = x^{J_1} + \ldots + x^{J_p} = x^{J_1 + \ldots + J_p} = x^T,$$

где $T \in \mathcal{J} \bigtriangleup H$, что и требовалось доказать.

Достаточность будем доказывать конструктивно. Так как классов $\{\mathcal{I}_e^H\}_{e \in E}$ ровно n и все они не пусты, то при выполнении условия (A) каждый класс $\mathcal{I}_e^H$ содержит только одно множество, которое мы обозначим через I_e^H. Пусть A – $(n \times n)$-матрица, у которой j-й столбец ($j = \overline{1, n}$) есть вектор инциденций множества $I_{e_j}^H$. Докажем, что преобразование $\varphi(x) = Ax$ является H-отображением.

Для начала докажем, что преобразование φ – невырожденно. Действительно, из определения множеств $I_{e_j}^H$, после соответствующих перестановок строк и столбцов матрица A приобретает вид:

$$\begin{array}{cc} & H \\ H & \boxed{\begin{array}{c} E \,\vdots\, * \\ \cdots\vdots\cdots \\ 0 \,\vdots\, E \end{array}} \end{array},$$

где E – единичная матрица.

Пусть J – любое множество из $\mathcal{J} \triangle H$. Докажем, что прообраз его вектора инциденций при преобразовании φ является вектором инциденций независимого множества.

Если оно неразделимо относительно $\mathcal{J} \triangle H$, то, по условию (A), оно является множеством I_e^H для некоторого $e \in E$. Причем, по построению, $\varphi^{-1}(x^J) = x^{\{e\}}$.

Пусть теперь $\mathcal{J} \triangle H$ разделимо и σ – простое разделение множества J относительно $\mathcal{J} \triangle H$. По условию (A), оно состоит из множеств I_e^H ($e \in E$). Положим

$$D = \bigcup_{I_e^H \in \sigma, e \notin H} I_e^H.$$

По условию (B), множество $D \in \mathcal{J} \triangle H$ и, следовательно, $D \triangle H \in \mathcal{J}$. С другой стороны, прямыми вычислениями легко убедиться, что $\varphi^{-1}(J) = x^{D \triangle H}$, что и требовалось доказать. ■

Из доказательства критерия немедленно вытекает следующее

Следствие . *Если $S_H \neq \emptyset$, то существует H-отображение следующего вида:* $\varphi(x) = \left(x^{I_{e_1}^H} x^{I_{e_2}^H} \dots x^{I_{e_n}^H}\right) x$. ■

3. Алгоритм построения H-отображения

Последнее следствие позволяет построить алгоритм, который, при $S_H \neq \emptyset$, выдает H-отображение.

Алгоритм поиска H-отображения

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$-матрица.

t-я итерация ($t = 1 \dots n$).

Шаг 1. $a_{tt} = 1$, $D = \{e_t\}$, $B = H$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Если $B = \emptyset$, то переходим к шагу 3. Иначе пусть $s \in B$. Если $D \cup \{s\} \in \mathcal{J}$, тогда $D = D \cup \{s\}$. Исключаем s из B и переходим к шагу 2.

Шаг 3. Для всех $k = 1 \dots n$, кроме t, сделать: если $e_k \in H \setminus D$, то $a_{kt} = 1$, иначе $a_{kt} = 0$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если данная итерация последняя ($t = n$), то A – матрица H-отображения. Иначе переходим к следующей итерации.

Вычислим сложность алгоритма. Под длиной входа будем понимать количество элементов во множестве E. Все шаги, кроме третьего, содержат не зависящее от n количество операций, а третий шаг содержит $n - 1$ операцию. В каждой итерации все шаги, кроме второго, повторяются один раз, а второй шаг повторяется $|H|$ раз, которых не больше, чем n. Так как итераций алгоритма n, то из вышесказанного следует, что сложность алгоритма $O(n^2)$ (с точностью до оракула независимости, обращение к которому происходит на втором шаге).

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М.:Наука, 1981.

2. Симанчёв Р.Ю. *Линейные симметрии многогранника паросочетаний и автоморфизмы графа* // Вестник Омского университета. 1996. N 1. С.18-20.

3. Червяков О.В. *Линейные симметрии и автоморфизмы матроида* // Фундаментальная и прикладная математика. Омск: ОмГУ, 1994. С.81-89.

4. Червяков О.В. *Симметрии многогранника системы независимости* // Вестник Омского университета. 1997. N 3. С.18-20.

5. Conforti M., Laurent M. *On the facial structure of independence system polyhedra* // Math. of operations research. 1988. V.13. N 4. P.543-555.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.33-36.

УДК 514.82

ПОРЯДКОВЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ВНЕШНЕ НЕОДНОРОДНЫХ НЕСВЯЗНЫХ ПОРЯДКОВ

Н.Л. Шаламова

It is shown that the order automorphisms of some disconnected exteriory non-homogeneous orders in affine space are affine transformations.

При построении аксиоматической теории относительности, основанной на идее определяющей роли причинно-следственных связей в задании топологии и геометрии пространства-времени, возникает проблема о правомерности предполагать наличие причинных связей в микромире. То, что причинность имеет место в макромире, не вызывает сомнений. Но имеем ли мы право экстраполировать этот факт на мир элементарных частиц? Выход видится в том, чтобы создать теорию, постулирующую макропричинность и умалчивающую о микропричинности. Возможно ли при этом прийти к геометрии пространства-времени Минковского, для которого группа причинных автоморфизмов совпадает с группой Пуанкаре? Такой вопрос был поставлен в 70-е годы А.Д.Александровым. Ответ оказался положительным [1]. Математически для этого используется теория несвязных порядков в аффинном пространстве. Особый интерес представляют гранично однородные порядки, которые реализуют идею изотропности физического пространства.

В этой статье исследуются автоморфизмы несвязного гранично однородного порядка. Показано, что они являются аффинными преобразованиями при условии, что события микромира, расположенные в пределах светового конуса с точки зрения одного наблюдателя, могут не восприниматься, вообще говоря, так же расположенными любым другим наблюдателем, хотя в сколь угодно далеком прошлом они обнаружены быть не могут.

Пусть в n-мерном аффинном пространстве $A^n, n > 2$, задан несвязный порядок $\mathcal{P}$, т.е. указано семейство $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ подмножеств P_x пространства A^n, для которого выполняются условия: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если $y \neq x$, то $P_y \neq P_x$; 4) $x \notin \overline{P_x \setminus \{x\}}$.

Далее в статье используются следующие обозначения. Если A – подмножество A^n, то $\overline{A}$, $intA$, и ∂A – соответственно замыкание, внутренность и граница множества A в естественной евклидовой топологии.

E-mail: shalam@univer.omsk.su

Гомеоморфизм $f: A^n \to A^n$ называется порядковым $\mathcal{P}$-автоморфизмом, если для любой $x \in A^n$ имеем $f(P_x) = P_{f(x)}$. Группу порядковых автоморфизмов порядка $\mathcal{P}$ будем обозначать $Aut(\mathcal{P})$. Если e фиксированная точка A^n, то $Aut(\mathcal{P})_e$ – это подгруппа группы $Aut(\mathcal{P})$, оставляющая точку e неподвижной, т.е. если $g \in Aut(\mathcal{P})_e$, то $g(P_e) = P_e$.

Порядок $\mathcal{P}$ называется гранично однородным (∂-однородным), если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $\partial P_e \setminus \{e\}$. Аналогично порядок $\mathcal{P}$ называется внешне однородным (ext-однородным), если группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на $A^n \setminus (P_e^- \cup P_e)$, где $P_e^- = \{y \in A^n : P_y \ni e\}$.

Предполагается, что порядок $\mathcal{P}$, о котором идет речь ниже: 1) инвариантен относительно группы параллельных переносов, т.е. множества $P_x, x \in A^n$, задающие порядок, получаются друг из друга параллельными переносами; 2) гранично однороден; 3) $intQ_x \neq \emptyset, \overline{intQ_x} = Q_x$.

Пусть $Q_x = P_x \setminus \{x\}, Q_x^- = P_x^- \setminus \{x\}$.

Внешний конус C_x для любого P_x представляет собой множество

$$C_x = \overline{\bigcup_{y \in Q_x} l_{xy}},$$

где l_{xy} – это луч с началом в точке x, проходящий через $y \in Q_x$.

Предположим, что C_x – конус с острой вершиной, т.е. не содержит прямой. Обозначим через C_x^- конус, центрально симметричный C_x относительно точки x.

Рассмотрим следующие множества:

$$T_1 = \overline{\bigcup_{x \in \partial Q_e} Q_x}, \ T_i = \overline{\bigcup_{x \in \partial T_{i-1}} Q_x}, \ 1 < i < +\infty.$$

Нетрудно видеть,что $f(T_1) = T_1$ и $f(T_i) = T_i$ для $1 < i < +\infty$. Допустим, что исследуемый нами порядок таков, что $\rho(\partial Q_e, \partial C_e) = 0$, $\rho(\partial Q_e, \partial T_i) = 0, 1 < i < \infty$, где $\rho(A, B)$ – это обычное евклидово расстояние между множествами A и B, и $\sup_{u \in \partial Q_e}(\rho(u, \partial C_e)) < +\infty$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ – несвязный гранично однородный порядок в аффинном пространстве $A^n, n > 2$, для которого выполнены указанные выше условия и существует выпуклый конус K_{u_0} с вершиной $u_0 \in intC_e^-$, любая опорная гиперплоскость к которому отсекает от C_e^- конечный объем, причем для любого $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ имеем $f(C_e) \subset K_{u_0}$. Тогда любой порядковый $\mathcal{P}$-автоморфизм будет аффинным преобразованием.*

Замечание 1. Наличие ограничивающего конуса K_{u_0} означает отсутствие у порядка внешней однородности.

Прежде чем начать доказательство, отметим, что порядки, для которых выполняются условия теоремы, существуют. Примером могут служить гранично однородные порядки с внешним конусом с «острой» вершиной и строго выпуклым множеством Q_e. Именно таков следующий порядок:

$$\mathcal{P}=\left\{(z_1,...,z_n)\in A^n: z_n-x_n\le\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(z_i-x_i)^2}\right\}\cup\{x_1,...,x_n\},$$

$$x=\{x_1,...,x_n\}\in A^n.$$

Итак, приступим к доказательству теоремы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{F}$ следующее множество:

$$\bigcup_f f(C_e),\quad f\in Aut(\mathcal{P})_e.$$

Достаточно очевидно, что для любого $f'\in Aut(\mathcal{P})_e$ $f'(\mathcal{F})=\mathcal{F}$, и, кроме того, $\mathcal{F}\subset K_{u_0}$ (это следует из условия теоремы). Поскольку $\mathcal{P}$ – несвязный порядок, то $d=\rho(e,\partial Q_e)>0$ и $\rho(e,T_i)=(i+1)d$. Обозначим через p расстояние от точки e до точки u_0. Легко видеть, что найдется такой номер m, что $T_{mu_0}\cap B(z,d)=\emptyset$, $B(z,d)=\{v:\rho(v,z)<d\}$, $z\in\partial Q_e$ и $\rho(z,e)=d$. Здесь множество T_{mu_0} получено из T_m путем параллельного переноса t такого, что $t(e)=u_0$.

Не ограничивая общности, считаем, что $\mathcal{F}\setminus C_e\neq\emptyset$. Действительно, если $\mathcal{F}=C_e$, то теорема доказана (см. [2]) (то, что $C_e\subset\mathcal{F}$, следует из определения $\mathcal{F}$, т.к. тождественное преобразование входит в $Aut(\mathcal{P})_e$). Итак, пусть $w_0\in\mathcal{F}\setminus C_e$. Тогда возможно следующее: либо $w_0\in A^n\setminus(C_e\cup C_e^-)$, либо $w_0\in C_e^-$. Допустим первое. Поскольку $\rho(\partial C_e,\partial T_i)=0(1<i<+\infty)$, то $\partial Q_e\cap\partial T_{iw_0}\neq\emptyset$. Вспомним о конусе K_{u_0}. Самое большее, чем может быть этот конус, оставаясь выпуклым, – это полупространство, ограниченное гиперплоскостью ∂K_{u_0}, отсекающей от конуса C_e^- ограниченный объем. В таком случае, обозначив $d_1=\rho(\partial K_{u_0},\partial Q_e)$, $d_2=\rho(\partial K_{u_0},\partial T_{mu_0})$, можно считать, что d_2 много больше d_1 (иначе заменим номер m на больший). Поэтому для всех точек $y_0\in\partial K_{u_0}$ будем иметь $T_{my_0}\cap B(z,d)=\emptyset$, т.к. шар $B(z,d)$, о котором шла речь выше, лежит в открытой полосе $int(K_{u_0}\setminus K_{u_1})$, где K_{u_1} полупространство, параллельное K_{u_0}, $\rho(\partial K_{u_0},\partial K_{u_1})=d_2$, и $e\notin K_{u_1}$. Понятно, что тем более $T_{my}\cap B(z,d)=\emptyset$, для точек $y\in intK_{u_0}$. Из этих рассуждений следует, что если K_{u_0} – выпуклый конус, не являющийся полупространством, то $K_{u_0}\subset K'_{u_0}$, где K'_{u_0} – полупространство, ограниченное некоторой опорной гиперплоскостью к K_{u_0}, отсекающей от C_e^- конечный объем, и для K'_{u_0} рассуждения, приведенные выше, верны. Значит, и для любых точек $y\in K_{u_0}$ имеем $T_{my}\cap B(z,d)=\emptyset$ (напомним, что номер m всегда при необходимости можно увеличить). Итак, с одной стороны у нас $T_{mw_0}\cap\partial Q_e\neq\emptyset$, с другой – $T_{mw_0}\cap B(z,d)=\emptyset$. Но порядок $\mathcal{P}$ гранично однородный, поэтому должен существовать такой $\mathcal{P}$-автоморфизм $f\in Aut(\mathcal{P})_e$, что $f(z_0)=z$, где $z_0,z\in\partial Q_e,\rho(z,e)=d$, $z_0\in\partial T_{mw_0}\cap\partial Q_e$. Если это так, то $z\in f(\partial T_{mw_0}\cap\partial Q_e)$, и, следовательно, $f(\partial T_{mw_0})\cap\partial B(z,d)\neq\emptyset$, в силу приведенных выше рассуждений.

Предположим далее, что все же $\mathcal{F}\setminus C_e\neq\emptyset$ и $w_0\in\mathcal{F}\setminus C_e$ такова, что $w_0\in C_e^-$. Тогда возможно, что либо

$\alpha) Q_e \subset T_{iw_0}$, либо

$\beta) \partial Q_e \cap \partial T_{iw_0} \neq \emptyset$ для всех или для некоторых $i, 1 < i < +\infty$.

Случай $\beta)$ не может иметь места в силу доказанного для всех i, начиная, вообще говоря, с некоторого i_0. Значит, имеем следующее: $\partial Q_e \cap \partial T_{i_0 w_0} = \emptyset$. Тогда, поскольку $C_e \subset C_{w_0}$ (напомним $w_0 \in C_e^-$), будем иметь $Q_e \subset T_{i_0 w_0}$. Точка $w_0 \in f(C_e)$ для некоторого $f \in Aut(\mathcal{P})_e$. Поэтому $w_1 = f^{-1}(w_0) \in C_e$, и, следовательно, $f^{-1}(Q_e) \subset f^{-1}(T_{i_0 w_0})$ или $Q_e \subset T_{i_0 w_1}$, что невозможно.

Значит, $\mathcal{F} = C_e$, и теорема доказана. ∎

Порядок $\mathcal{P}_1 = \{P_{1x} : x \in A^n\}$ называется расширением порядка $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, если $P_x \subset P_{1x}$, $P_x \neq P_{1x}$ для любой точки $x \in A^n$ и $Aut(\mathcal{P}) \subset Aut(\mathcal{P}_1)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{P}$ – несвязный гранично однородный порядок в аффинном пространстве $A^n, n > 2$, для которого выполнены условия теоремы 1. Тогда порядок $\mathcal{P}$ расширяется до порядка $\mathcal{C} = \{C_x : x \in A^n\}$, задаваемого семейством внешних конусов множеств P_x.*

Доказательство. По доказанному выше имеем $f(C_e) = C_e$ для любого $f \in Aut(\mathcal{P})_e$, и, следовательно, $f(C_x) = C_{f(x)}$ для любой точки x. Из [1] известно, что C_x – выпуклый конус. Поэтому семейство $\mathcal{C}$ задает порядок в A^n, являющийся расширением порядка $\mathcal{P}$, что доказывает теорему 2. ∎

Литература

1. Гуц А.К. *Аксиоматическая теория относительности* // УМН. 1982. Т.37. N 2. С.39-79.

2. Шаламова Н.Л. *Хроногеометрия несвязных гранично однородных порядков в аффинном пространстве* // Вестник Омского университета. 1996. N 1. С.12-14.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.37-47.

УДК 519.49

РАЗРЕШИМЫЕ P-АЛГЕБРЫ ЛИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

М.А. Шевелин

Some facts concerning with structure of solvable restricted Lie algebras satisfying finiteness conditions on commutative restricted subalgebras are proved. For metabelian restricted Lie algebra without nontrivial finite-dimensional restricted subalgebras some cohomological sufficient condition to be of finite rang is obtained. Restricted Lie algebra over $GF(2)$ providing an example when this condition is not necessary is found.

1. Некоторые определения и соглашения

Пусть p — простое число. Буквой k мы обозначаем простое поле характеристики p, а K — совершенное поле той же характеристики. Определения p-алгебры Ли, ограниченной универсальной обертывающей и необходимые факты можно найти в [4]. Мы предполагаем, что на p-алгебре Ли L над K p-отображение раз и навсегда зафиксировано и опускаем квадратные скобки в его записи. uL обозначаем ограниченную универсальную обертывающую для L. Под L-модулем мы будем понимать uL-модуль, то есть $x^{[p]}$ всегда действует так же, как x^p.

Алгебра uL обладает пополнением $\varepsilon : uL \to K$, то есть гомоморфизмом ассоциативных алгебр, определенным правилами: $\varepsilon(L) = 0, \quad \varepsilon(1) = 1$. Благодаря этому можно определить группы когомологий p-алгебры Ли L со значениями в L-модуле M следующим образом. Пусть X – произвольная проективная резольвента тривиального uL- модуля K. Тогда по определению

$$H^n(L, M) = Ext^n_{uL}(K, M) = H^n(Hom_{uL}(X, M)).$$

Определение 1. О p-алгебре Ли L над K будем говорить, что она имеет когомологическую размерность $\leq n$, если группы когомологий с номерами большими n и с произвольными коэффициентами являются нулевыми. (Обозначение: $cdL \leq n$). Наименьшее целое неотрицательное число (если оно существует)

E-mail: shevelin@univer.omsk.su

n со свойством $cdL \leq n$ называется когомологической размерностью L. Предыдущее определение влечет, что найдется проективная резольвента тривиального uL-модуля K длины не более n [1, с.143].

Обозначим uL' ассоциативную алгебру, антиизоморфную uL. Пусть отображение $E : uL \to uL \otimes uL'$ задано правилом:
$E(l) = l \otimes 1 - 1 \otimes l, \ \ (l \in L)$
Для отображения E выполнены свойства, обозначенные в книге [1] (E.1) и (E.2), поэтому, согласно той же книге (теоремы X, 6.1 и X, 6.2) справедлива следующая

Теорема 1. *$gl.dimuL = dim_{uL\otimes uL'}uL = dim_{uL}K = cdL$ (Два внутренних значка dim обозначают проективную размерность модулей в смысле [1] VI, 2.).* ■

Следствие 1. *Если $cdL < \infty$, то каждый uL-модуль имеет конечную проективную резольвенту.* ■

Лемма 1. *1) Если L_1 — p-подалгебра в L, то $cdL_1 \leq cdL$.*
2) Если $0 \neq L$ — однопорожденная конечномерная p-алгебра Ли, то $cdL = \infty$.
3)Когомологическая размерность прямой суммы двух p-алгебр Ли не превосходит суммы когомологических размерностей прямых слагаемых.

Доказательство. 1) следует из предложения X,7.2 книги [1] (которое означает, что $Ext^n_{uL_1}$ для K с некоторыми коэффициентами есть Ext^n_{uL} для K, только с другими коэффициентами) и определения cd.

Чтобы доказать 2), рассмотрим конечномерную ненулевую p-алгебру Ли L с одним порождающим. $qL = \langle x | \, f(x) = 0 \rangle$ для некоторого $f \in K_p[T]$, $f(0) = 0$. Ее ограниченная универсальная обертывающая есть $R = K[T]/fK[T]$. Пусть $\varepsilon : R \to K$ гомоморфизм ассоциативных алгебр, заданный условиями $\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(1) = 1$; $\delta = [f(T)/T]_{T=0} \in K$. Последовательность L-модулей $(M_i, d^i)_{i \geq 0}$, в которой $M_{-1} = K$, $M_i = R$ для остальных i; $d^{-1} = 0$, $d^0 = \varepsilon$, $d^{2m+1} =$ умножение на x, $d^{2m} =$ умножение на $[f(T)/T]_{T=x}$, как нетрудно проверить, точна. Применивши к ней $Hom_R(\ , K)$, получим последовательность

$$0 \leftarrow K \leftarrow K \leftarrow K \leftarrow \dots ,$$

в которой левая стрелка поочередно обозначает то умножение на 0, то умножение на δ. Поэтому группы когомологий этой последовательности — это поочередно то $im\delta$, то $K/im\delta$. Значит, независимо от того: $\delta = 0$ или $\delta \neq 0$ найдется бесконечно много этих групп, не равных нулю. Следовательно, $cdL = \infty$.

3) следует из теоремы 2 и предложения 7.4 гл.IX книги [1]. ■

Определение 2. p-алгебра Ли L называется алгеброй без кручения, если в L нет ненулевых конечномерных p-подалгебр.

Определение 3. p-алгебра Ли называется алгеброй ранга $\leq n$, если каждая ее конечнопорожденная p-подалгебра может быть порождена $\leq n$ элементами.

2. Коммутативные p-алгебры Ли

Рассмотрим множество $k_p[T]$ всех p-многочленов от буквы T с коэффициентами в поле k. На этом множестве можно определить операцию $(f \circ g)(T) = f(g(T))$. Эта операция коммутативна, ассоциативна и k-билинейна. Отображение

$$k_p[T] \ni \sum_i \alpha_i T^{p^i} \to \sum_i \alpha_i t^i \in k[t]$$

является изоморфизмом ассоциативных алгебр. Если A коммутативная p-алгебра Ли, то можно превратить A в $k_p[T]$ и тем самым в $k[t]$-модуль, полагая для $f \in k_p[T], a \in A \quad f \circ a = f(a)$.

Пусть L будет свободная коммутативная конечнопорожденная p-алгебра Ли над полем k с множеством свободных порождающих $x_1, \ldots, x_n$. L состоит из всевозможных выражений $\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \circ x_i$, причем соответствие

$$\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \circ x_i \to (f_1, \ldots, f_n)$$

является изоморфизмом $k_p[T]$-модулей. Обычным способом доказывается (ср.[3], упр.23 к гл.1,§1).

Лемма 2. *Каждая конечнопорожденная коммутативная p-алгебра Ли A над полем k раскладывается в прямую сумму однопорожденных p-подалгебр. Для каждой p-подалгебры $X \leq A$, порожденной $\{x_1, \ldots, x_m\}$ существует множество $\{a_1, \ldots, a_m\}$ порождающих A и p-многочлены из $k_p[T]$ $\{f_i | 1 \leq i \leq m\}$ такие, что $x_i = f_i(a_i)$ Найдутся две такие p-подалгебры A_1 и A_2, что A_1 без кручения, A_2 конечномерна и $A = A_1 \oplus A_2$. В A_2 существует цепочка*

$$0 = B_0 < B_1 < \ldots < B_n = A_2,$$

p-подалгебр, все факторы которой одномерны. ■

Замечание 1. Если K – совершенное поле характеристики p, то ассоциативная алгебра $K_p[T]$ изоморфна над k расширению Оре $K[t, \pi]$, где

$$\pi : K \to K$$

— автоморфизм возведения в p-ю степень. Так что в этом случае предыдущая лемма тоже справедлива ([2], гл. 8).

Пусть A — свободная коммутативная p-алгебра Ли с порождающими $x_1, \ldots, x_n$, $Der_p A = \{\partial \in End_k A | \partial(A^p) = 0\}$ p-алгебра Ли p-дифференцирований алгебры A. Сопоставим каждому дифференцированию ∂ матрицу (ϕ_{ij}), в которой $\partial x_i = \sum f_{ij}(x_j)$, а $\phi_{ij} \in k[t]$ – многочлены, соответствующие p-многочленам f_{ij} при изоморфизме ассоциативных алгебр $k_p[T]$ и $k[t]$, который был определен выше.

Пусть для $f(t) \in k[t]$ $\varepsilon f = f(0)$, а для любой матрицы $m = (m_{ij})$ с элементами в $k[t]$ пусть $\varepsilon m = (\varepsilon m_{ij})$. Обозначим $\mathcal{E}$ алгебру над полем k, элементы которой составляют $M_n(k[t])$, а умножение определяется правилом $a.b = a\varepsilon b$ (справа стоит произведение матриц). Эта алгебра (без 1!) ассоциативна в силу равенства $\varepsilon^2 = 1$. Очевидно, векторное пространство $Der_p A$ вкладывается в $\mathcal{E}$, причем суперпозиции дифференцирований отвечает произведение элементов $\mathcal{E}$, а действие $\mathcal{E}$ на $k[t]^n$, определенное правилом $a.v = a\varepsilon v$ (справа стоит произведение матриц), согласовано с действием $Der_p A$ на A.

Лемма 3. *Пусть R — конечнопорожденная подалгебра в $\mathcal{E}$. Тогда R конечномерна.*

Доказательство. Пусть R порождена элементами $r_1, \dots r_l$. Тогда $k^n + R.k[t]^n$ — R-инвариантное подпространство и

$$k^n + R.k[t]^n \subset k^n + r_1 k^n + \ldots + r_l k^n.$$

Последнее пространство очевидно конечномерно. Представление R в $k^n + R.k[t]$ точное, так как $a.(k^n + R.k[t]) = 0$ влечет $a.k^n = ak^n = 0$, а это значит $a = 0$. Значит R конечномерна. ■

Следствие 2. *Пусть L — конечнопорожденная p-подалгебра Ли в p-алгебре Ли $Der_p A$. Тогда L конечномерна.* ■

Следствие 3. *Пусть A' — конечнопорожденная коммутативная p-алгебра Ли, L — конечнопорждённая p-подалгебра в $Der_p A'$. Тогда L конечномерна.*

Доказательство. Пусть A будет свободная коммутативная p-алгебра Ли с тем же множеством свободных порождающих, что и A', $\{\partial'\}$ — конечное множество, порождающее L. Каждое дифференцирование ∂' определяется своим действием на порождающие A'. Пусть $\partial \in Der_p A$ будет одно из дифференцирований, действующих на порождающих «так же» как ∂'. Сразу же видно, что значки ∂ (с точностью до штрихов) перестановочны со значком гомоморфизма $A \to A'$. Получается эпиморфизм

$$алг_p\{\partial\} \to алг_p\{\partial'\} = L,$$

который переводит каждый лиев p-многочлен от $\{\partial\}$ в такой же многочлен от $\{\partial'\}$. Поэтому L конечномерна. ■

Определение 4. Коммутативная p-алгебра Ли A над полем k называется делимой, если для каждого $f \in k_p[T]$ и каждого $a \in A$ найдется такой $y \in A$, что $f(y) = a$.

Сразу видно, что свойство делимости сохраняется при эпиморфизмах, переносится на прямые суммы, наследуется прямыми сомножителями.

Леммы, доказательства которых опущены, доказываются так же, как аналогичные утверждения об абелевых группах.

Лемма 4. *Делимая p-подалгебра Q коммутативной p-алгебры Ли A над полем k выделяется в A прямым слагаемым, т.е. $A = Q + C$ для некоторой p-подалгебры C.* ■

Пример 1. Расположим множество $k_p[T]$ в виде последовательности $f_0, f_1, \ldots$. Пусть

$$D = \langle x_0, x_1, \ldots | [x_i, x_j] = 0, f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i \rangle.$$

Докажем, что алгебра D делима. Пусть $f \in k_p[T], a \in D$ и нам нужно решить уравнение $f(y) = a$. Из определения D сразу выводится, что каждое такое уравнение можно переписать в виде

$$f(y) = h(f(x_n)),$$

если выбрать n достаточно большим. Но $h \circ f = f \circ h$. Поэтому можно взять $y = h(x_n)$.

Лемма 5. *Каждую коммутативную p-алгебру Ли над полем k можно вложить в делимую.* ∎

Определение 5. Пусть $A > B$ две коммутативные p-алгебры Ли и A делима. A называется делимой оболочкой B, если в A нет промежуточных между A и B делимых p-подалгебр.

Пусть B существенная p-подалгебра делимой p-алгебры Ли A в том смысле, что все ненулевые p-подалгебры в A имеют ненулевое пересечение с B. Легко проверить, что критерием мономорфности гомоморфизмов $\phi : A \to A_1$ является мономорфность сужений $\phi|_B$

Лемма 6. *Делимая p-алгебра Ли Q без кручения, содержащая A, является делимой оболочкой A тогда и только тогда, когда A существенна в Q.* ∎

Лемма 7. *Каждая делимая p-алгебра Ли без кручения Q вместе с p-подалгеброй A содержит некоторую делимую оболочку A. Любые две делимые оболочки A изоморфны.* ∎

Лемма 8. *Пусть A – коммутативная p-алгебра Ли без кручения. Q — ее делимая оболочка. Тогда ранг A=ранг Q.*

Доказательство. Неравенство $\leq$ очевидно. Остальное следует из леммы 2 и леммы 4. ∎

Лемма 9. *$cd_k D \leq 2$ (D из примера).*

Доказательство. Пусть R обозначает ассоциативную алгебру uD.

$$R = \langle x_0, x_1, \ldots | x_i x_j = x_j x_i, f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i \rangle.$$

Пусть M будет свободный R-модуль с базой $\{X_i\}$, $\phi_i \in k[T]$ такие многочлены, что $f_i = T\phi_i$ в $k[T]$, $\varepsilon : R \to k$ «пополнение » k-алгебры R, определенное правилом: $\varepsilon(x_i) = 0$, $\varepsilon(1) = 1$. Определим гомоморфизм R-модулей $M \to ker\varepsilon$ правилом $X_i \to x_i$. Нам нужно показать, что его ядро — свободный R-модуль.

$ker(M \to ker\varepsilon)$ =подмодуль, порожденный$\{X_{i+1}\phi_{i+1} - X_i\}$. Допустим, что для некоторых $\rho_i \in R$

$$\sum_{i\geq 0}(X_{i+1}\phi_{i+1} - X_i)\rho_i = 0,$$

($\rho_i = 0$ для почти всех i). Из этого следует, что $\rho_0 = 0, \rho_1 = 0, \ldots$ Это значит, что $ker(M \to ker\varepsilon)$ свободный модуль с базой $\{X_{i+1}\phi_{i+1} - X_i\}$. Что и требовалось. ∎

Теорема 2. *Пусть A – коммутативная p-алгебра Ли. A без кручения конечного ранга тогда и только тогда, когда $cdA < \infty$.*

Доказательство. Если A без кручения и конечного ранга, то A вкладывается в конечную прямую сумму алгебр, изоморфных D из примера. Далее применяем лемму 1.

Наоборот, если $cdA < \infty$, то, во первых, по лемме 1 A не может иметь конечномерных p-подалгебр, а во вторых, конечнопорожденные p-подалгебры в A свободны и не могут быть прямой суммой более, чем cdA своих однопорожденных p-подалгебр, ибо по теореме Гильберта о «цепях сизигий» когомологическая размерность такой подалгебры равна числу ее свободных порождающих.∎

Замечание 2. Одна из теорем [2] утверждает, что если в кольце R выполняется условие Оре, то в кольце косых многочленов над R тоже оно выполняется. Пусть K — совершенное поле характеристики p. Категория коммутативных p-алгебр Ли над полем K эквивалентна категории модулей над кольцом косых многочленов $K[t;\pi]$ ($\pi : K \to K$ — автоморфизм возведения в степень p), которое кольцо обладает телом частных. Поэтому все утверждения этого параграфа останутся справедливыми, если k заменить на совершенное поле характеристики p.

3. Разрешимые p-алгебры Ли без кручения и конечного ранга

Пусть K — совершенное поле характеристики p. G — разрешимая p-алгебра Ли над K. G называется нетеровой (или принадлежит Max), если возрастающие цепочки p-подалгебр в G обрываются за конечное число шагов. Если каждая возрастающая цепочка коммутативных p-подалгебр обрывается за конечное число шагов, то говорим, что $G \in MaxAb$. Если в G найдется субнормальная цепочка p-идеалов с однопорожденными (как алгебры) факторами, то G называется полициклической.

Лемма 10. *Пусть G полициклическая p-алгебра Ли. Тогда ее ограниченная универсальная обертывающая ассоциативная алгебра uG нетерова справа и слева.*

Доказательство. Выберем в G цепочку $G = G_m > G_{m-1} > \ldots > G_0 = 0$ с однопорожденными факторами, обозначим $R_i = uG_i$ и предположим, что R_i

нетерова справа. Пусть $x \in G_{i+1}$ такой элемент, что $G_{i+1} = алг_p(x, G_i)$. Можно считать, что G_{i+1}/G_i бесконечномерна (в противном случае R_{i+1} — конечнопорожденный модуль над R_i). Обозначим ∂ дифференцирование алгебры R_i, такое что $\partial|_{G_i} = adx|_{G_i}$. Тогда алгебра R_{i+1} представится как кольцо косых многочленов $R_i[x; 1, \partial]$. По одной теореме из [2] R_{i+1} нетерова справа и слева.■

Теорема 3. *Пусть G — разрешимая p-алгебра Ли. $G \in Max \iff G$ полициклическая.*

Доказательство. Если G разрешима и $\in Max$, то G полициклическая по лемме 2.

Наоборот, пусть G полициклическая. Допустим $A_1 < A_2 < \ldots$ строго возрастающая бесконечная цепочка p-подалгебр. Тогда цепочка правых идеалов в uG, порожденных A_i тоже бесконечная и строго возрастающая. ■

Лемма 11. *Пусть $p > 2$, G — полициклическая p-алгебра Ли над совершенным полем K. Тогда найдется нильпотентный p-идеал N в G конечной коразмерности.*

Доказательство. Рассмотрим в G цепочку p-идеалов

$$0 = G_0 < G_1 < \ldots < G_{m+1} = G$$

в которой все факторы G_i/G_{i+1} конечнопорожденные коммутативные p-алгебры Ли. Рассмотрим представления G в факторах G_i/G_{i+1}, определенные правилом: для $g \in G$, $h \in G_i$ положим $g.(h + G_{i+1}) = [g, h] + G_{i+1}$. По лемме 6 ядра N_i этих представлений имеют конечные коразмерности в G, значит пересечение $N = \bigcap N_i$ тоже имеет конечную коразмерность в G. По определению N, для всех $i = 0, \ldots, m$ $[G_{i+1}, N] \subseteq G_i$, следовательно, $[G, N, \ldots, N] = 0$, если прокоммутировать $m + 1$ раз, тем более N нильпотентна. ■

Следствие 4. *В условиях предыдущей леммы центр G имеет конечную коразмерность в G.*

Доказательство. В обозначениях предыдущей леммы для каждого $h \in N$ $h^{p^l} \in Z(N)$ при $p^l \geq m + 1$. $Z(N)^p \subseteq Z(G)$, ибо $Z(N)$ есть коммутативный p-идеал в G. Значит $N' = N/Z(G)$ нильпотентна и для всех $x \in N'$ $x^{p^l} = 0$. Значит центр N' конечномерен. Индукцией по ступени нильпотентности N' убеждаемся, что N' конечномерна, что и требовалось. ■

Следствие 5. *uG представима матрицами над кольцом многочленов от нескольких неизвестных.*

Доказательство. Центр uG содержит кольцо многочленов $uZ(G)$ от нескольких неизвестных и uG является свободным модулем конечного ранга над этим кольцом по предыдущей лемме. Далее используем регулярное представление. ■

Лемма 12. *Пусть G — нильпотентная p-алгебра Ли, M — максимальный коммутативный p-идеал в G. Тогда M совпадает со своим централизатором $C_G(M)$ и поэтому является максимальной коммутативной p-подалгеброй.*

Доказательство. Пусть $0 < Z_0 < \ldots < Z_n = G$ — верхний центральный ряд G. Сделаем индуктивное предположение (очевидно верное при $i = 0$), что $C_G(M) \cap Z_i \subseteq M$. Пусть $x \in C_G(M) \cap Z_{i+1}$. Тогда $[x, M] = 0$ и $[x, G] \subseteq Z_i$. Если $y \in G$, то $[[x, y], M] = 0$ и $[x, y] \in Z_i$. По индуктивному предположению $[x, y] \in M$. Это значит, что p-подалгебра, порожденная x и M является коммутативным p-идеалом. Максимальность M дает $x \in M$, что и завершает индукцию. ■

Теорема 4. *Если $p > 2$, $G \in MaxAb$, G разрешима и без кручения, то $G \in Max$.*

Доказательство. 1. Сначала заметим, что если A — субнормальная коммутативная p-подалгебра в G (т.е. существует конечная субнормальная возрастающая цепочка p-подалгебр, начинающаяся с A и кончающаяся на G), то A имеет конечную коразмерность в $A + Z(G)$. Действительно, пусть $A < B_1 < \ldots < B_m = G$ — субнормальная цепочка. Ясно, что $A^p \subseteq Z(B_1)$, поскольку A — коммутативный p-идеал в B_1. $Z(B_1)$ — коммутативный p-идеал в B_2, поэтому $Z(B_1)^p \subseteq Z(B_2)$. Продолжая в том же духе, получим, что $A^{p^m} \subseteq Z(B_m) = Z(G)$. Так как A — конечно порожденная коммутативная p-алгебра Ли, то $dim_K A/A^p < \infty$. Для дальнейшего заметим, что условие «без кручения» здесь не пригодилось.

2. Рассмотрим теперь p-алгебру Ли $G' = G/Z(G)$. Докажем, что все коммутативные p-подалгебры в ней конечно порождены. Для этого возьмем p-подалгебру $B < G$, такую, что $B > Z(G)$ и $B/Z(G)$ — коммутативна. Тогда $[B, B, B]$ — нильпотентна. Очевидно, $B^p \subseteq Z(B)$. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — элементы B, линейно независимые по модулю $Z(B)$. Предположим, что их степени ${b^p}_1, \ldots, {b^p}_m$ линейно зависимы по модулю $Z(B)^p$. Тогда для некоторых, не всех нулевых, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_m b_m \in Z(B)^p.$$

Так как поле K совершенно и $(a + \ldots + b)^p - a^p + \ldots + b^p \in [B, B, B] = 0$, то для некоторых $\alpha'_1 \ldots \alpha'_m$, не всех нулевых, и некоторого $c \in Z(B)$ $(\alpha'_1 b_1 + \ldots + \alpha'_m b_m - c)^p = 0$. Условие «без кручения» теперь дает $\alpha'_1 b_1 + \ldots + \alpha'_m b_m = c \in Z(B)$. Противоречие. Это означает, что $dim_K(B/Z(B)) \leq dim_K(Z(B)/Z(B)^p) < \infty$. То есть B конечно порождена как расширение конечно порожденной p-алгебры Ли $Z(B)$ при помощи конечномерной $B/Z(B)$.

3. Предыдущие рассуждения доказывают, что в G' все коммутативные p-идеалы в G' конечномерны. Индукцией по ступени разрешимости G' докажем, что G' конечномерна. С этой целью возьмем коммутативный p-идеал A' в G' и докажем, что в G'/A' коммутативные p-идеалы конечномерны. Пусть B' — p-идеал в G', $B' > A'$ и B'/A' коммутативна. Поскольку $[B', B'] \leq A'$, то присоединенное представление B', суженное на A', индуцирует вложение векторных пространств $B'/C_{B'}(A') \to End_K(A')$. Так как пространство справа от стрелки

конечномерно, то нам осталось проверить, что централизатор $E' = C_{B'}(A')$ конечномерен. Так как $C_{B'}(A') = C_{G'}(A') \cap B'$, то E — нильпотентный p-идеал в G'. Пусть M' — максимальный коммутативный p-идеал в E'. По лемме 12 M' совпадает со своим централизатором в E' и является максимальной коммутативной p-подалгеброй в E'. E'/M' вкладывается в $Hom_K(M'/M'^p, Z(E'))$. Последнее пространство конечномерно, так как $Z(E')$ — коммутативный p-идеал в G', а M' субнормальна в G', и по этой причине почти вся содержится в $Z(G')$ (см. пункт 1). При надлежащем выборе A' можно применить индуктивное предположение. Теорема доказана. ■

Теорема 5. *Пусть $p \geq 5$, G — p-алгебра Ли без кручения с тождеством $[[G,G],[G,G]] = 0$ и все коммутативные p-подалгебры в G конечного ранга. Тогда и G имеет конечный ранг.*

Доказательство. Стандартные доводы показывают, что ранг расширения p-алгебры Ли X

при помощи p-алгебры Ли Y не превосходит суммы рангов X и Y. Пусть A — коммутативный p-идеал в G. $B > A$ —такая p-подалгебра в G, что $B' = B/A$ — коммутативная p-подалгебра в $G' = G/A$. B вкладывается в $End_K(A/A^p)$ по модулю

$$E = \{b \in B \,|\, [b, A] \leq A^p\}.$$

Так как $[E, E] \leq A$, то $[E, E, E] \leq A^p$,

$$[E, E, E, E] \leq [A^p, E] \leq [A, \ldots, [A, E]] \leq [A, A] = 0.$$

Пусть X обозначает максимальную коммутативную p-подалгебру в E, содержащую A. X — p-идеал в B, $C_E(X) = X$ и X содержит $Z(G)$. Пусть r будет ранг X, а $e_1, \ldots, e_k$ — некоторые элементы E. Поскольку $p \geq 5$, а $[E, E, E, E] = 0$, то ${e_i}^p \in Z(E) \in X$. Найдутся такие r p-многочленов

$$u_1, \ldots, u_r \in \oplus_{0 \leq i \leq k} K_p[t_i]$$

и такие k p-многочленов

$$f_1, \ldots, f_k \in \oplus_{0 \leq i \leq r} K_p[t_i],$$

что

$${e_i}^p = f_i(u_1({e_1}^p, \ldots, {e_k}^p), \ldots, u_r({e_1}^p, \ldots, {e_k}^p)),$$

потому что X имеет ранг r. Поскольку поле K совершенно, $p \geq 5$, $[E, E, E, E] = 0$, то $(a+b)^p - a^p - b^p \subseteq [E, E, E, E, \ldots, E] = 0$, и последнее равенство можно переписать в виде

$${e_i}^p = (f'_i({u_1}', \ldots, {u_r}'))^p, \quad (f'_i \in \oplus_{0 \leq i \leq r} K_p[t_i],\ u'_i \in E);$$

или

$$e_i - f'_i({u_1}', \ldots, {u_r}') = 0,$$

поскольку G без кручения. Это означает, что p-подалгебра, порожденная $\{e_i\}$ не более, чем r-порождена, то есть E имеет ранг не более r. Как замечено выше, B/E вкладывается в конечномерное пространство $End_K(A/A^p)$ и поэтому конечномерна. Значит, B является расширением p-алгебры Ли конечного ранга при помощи конечномерной, т.е. сама имеет конечный ранг. При $B = G$ получаем, что требовалось. ∎

Замечание 3. Видимо, заключение предыдущей теоремы справедливо при гораздо более слабых предположениях: G разрешима, и все коммутативные p-подалгебры в G имеют конечные ранги.

Теорема 6. *Пусть $p \geq 5$, $cdG < \infty$ и G удовлетворяет тождеству $[[G,G],[G,G]] = 0$. Тогда G конечного ранга и без кручения.*

Доказательство. Пусть $0 \neq L$ — конечномерная p-подалгебра в G. Тогда $cdL = \infty$ по лемме 1, 2). Поскольку $cdL \leq cdG$, то $cdG = \infty$, вопреки предположению. Значит, G без кручения. Все все коммутативные p-подалгебры в G должны иметь конечные ранги (лемма 1, 1), теорема 2). По предыдущей теореме G имеет конечный ранг. ∎

Обратное не верно (правда, в случае $p = 2$!), как показывает следующий

Пример 2. 2-алгебра Ли $L = \langle a, b, z | [a, b] = a^2 = b^2 = z \rangle$ над полем $GF(2)$ нетерова, без кручения, но $H^n(L, GF(2)) = GF(2)^2$, $n > 1$. Кроме этого, uL – целостное кольцо.

Рассмотрим $R = uL$ как алгебру над своим подкольцом S, порожденным z. Очевидно, что это подкольцо есть кольцо многочленов от буквы z. Каждый элемент R может быть единственным способом записан в виде

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma ab + \delta,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$. Положим $x^* = x + \gamma z$. Проверяется, что $(xy)^* = y^* x^*$ и $xx^* = x^* x = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)z + \gamma^2 z^2 + \gamma\delta z + \delta^2 \in S$. Отсюда как обычно следует, что для $N(x) = x^* x$ выполнено равенство $N(xy) = N(x)N(y)$. Значит, нам достаточно убедиться, что $N(x) = 0$ влечет $x = 0$. Допустим $N(x) = (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)z + \gamma^2 z^2 + \gamma\delta z + \delta^2 = 0$, причем $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$ не все нулевые многочлены от z и α имеет наименьшую возможную степень. Равенство $N(x) = 0$ означает, что

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)z = \gamma^2 z^2 + \gamma\delta z + \delta^2.$$

Откуда следует, что $\delta = z\delta'$ для некоторого многочлена $\delta' \in GF(2)[z]$. Получается, что

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = z(\gamma^2 + \gamma\delta' + \delta'^2).$$

Подставляя $z = 0$, получим $\alpha^2(0) + \beta^2(0) + \alpha(0)\beta(0) = 0$. Если $\alpha(0) = 0$, то $\beta(0) = 0$ и $\alpha = z\alpha'$, $\beta = z\beta'$, в противоречие с выбором x. Если же $\alpha(0) \neq 0$, то $\frac{\alpha(0)}{\beta(0)}$ — примитивный корень степени 3 из 1, лежащий в $GF(2)$, опять противоречие. Значит $x = 0$. Поэтому R целостно, а L без кручения.

Заметим, наконец, что когомологическая размерность не зависит от расширения основного поля и что $cd(GF(4) \otimes_{GF(2)} L) = \infty$ по лемме 1 (появляется кручение $a + \zeta b$, $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$). Поэтому, $cdL = \infty$.

Интересно, что алгебра L доставляет пример того, что свойство «быть алгеброй без кручения» зависит от того, над каким полем рассматривается алгебра.

Литература

1. Картан, Эйленберг. *Гомологическая алгебра.* – М.: ИЛ, 1960.

2. Кон П. *Свободные кольца и их связи.* – М.: Мир, 1975.

3. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1976.

4. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1968.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.4-12.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ПСИХИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.К. Гуц

The problem of modeling of social psychological processes in society. The basis for mathematical model is the Bekhterev's collective reflexology. The relation this model with ethnic and social processes is discussed.

В этой статье обсуждается возможный подход к математическому моделированию общества в срезе протекающих в нем так называемых социально-психических процессов. Речь идет о создании модели развития психических процессов в больших социальных группах, в результате которых принимаются кардинальные решения в судьбе как конкретного общества, так и всей земной цивилизации. В некотором смысле предпринимается попытка создания математической социальной психологии. Под последней часто понимается набор математических методов, используемых в традиционных психологических исследованиях. Такое понимание сущности математической психологии эквивалентно тому, как если бы под математической кулинарией понималось обучение поваров солить суп в соответствии с усредненным вкусом посетителей ресторана, выявленного при проведении опроса. Под математической социальной психологией мы имеем в виду принципиально новую науку, которая придет на смену современной социальной психологии и со временем утратит прилагательное «математическая», подобно тому, как современная физика, унаследовав свое название от физики времен Аристотеля, не может существовать в какой-либо иной форме, чем в форме математических структур.

1. Психоисторическая система

Благодаря В.И. Вернадскому стало понятным, что на современном этапе действия отдельных элитарных групп в лидирующих государствах могут оказать катастрофическое воздействие на биосферу Земли. Это означает, что модель социально-психических процессов не может рассматриваться изолированно от

E-mail: guts@univer.omsk.su

соответствующей модели эволюции земной биосферы. Понятие «социальный процесс» требует анализа, в результате которого необходимо выделить «этнические процессы», «собственно социальные процессы» (развитие политической структуры и экономики), «социально-психические процессы» и процессы, связанные с функционированием человеческих ценностей. Чтобы как-то различить общий «социальный процесс» от упомянутого «собственно социального процесса», последний будем называть социальным, а первый, быть может, не совсем удачно, психоисторическим. Название это связано с идеей создания науки «психоистория», изложенной в фантастическом романе А. Азимова «Основание».

Предположим, что «психоисторическое движение» или «психоисторическая энергия» общества – некоторая функция времени $H(t)$, которая допускает разложение в «ряд Фурье» вида

$$H(t) = \sum_{n=0}^{n_0} H_n^{(0)}(t)e^{i\omega nt} + \\ + \sum_{n=n_0+1}^{n_1} Б_n(t)e^{i\omega nt} + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} Э_n(t)e^{i\omega nt} + \\ + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} S_n(t)e^{i\omega nt} + \sum_{n=n_3+1}^{n_4} R_n(t)e^{i\omega nt} + \\ + \sum_{n=n_4+1}^{n_5} P_n(t)e^{i\omega nt} + \sum_{n=n_5+1}^{\infty} H_n^{(1)}n(t)e^{i\omega nt}.$$

Здесь «коэффициенты» $Б_n(t)$ характеризуют динамику земной биосферы. Длина биологической «волны» $1/\omega n$ (точнее говоря, характерное время протекания процесса до момента его повторения) соответствующей гармоники $\exp(i\omega nt)$ имеет порядок миллиона лет. «Коэффициенты» $Э_n(t)$, $S_n(t)$, $R_n(t)$, $P_n(t)$ соответственно связаны с этносферой, социосферой, социальной психосферой и антропосферой (человеческие ценности). Длины их «волн» имеет тенденцию к уменьшению; для этнических процессов она порядка 1000 *лет*, для социальных – 100 *лет*, социально-психических – 10 *лет* (что может означать и 5 лет). Человеческие ценности в данной модели могут сменяться в считанные месяцы, и это не случайно, поскольку «вечные ценности» для любого народа рождаются вместе с ним как этнической целостностью. Например, в форме религии, как, в частности, для русского народа такие ценности содержатся в его историческом православии [1, с.147], [2].

Таким образом, каждая очередная «высшая» форма движения живой материи – всего лишь серия «морщинок» на гребне «менее высокой» формы. Однако, как известно из естествознания, высшие гармоники при определенных условиях могут внести существенную смуту в общий процесс и определять основные характерные черты «психоисторического движения» $H(t)$.

Отметим, что смысл «коэффициентов» $H_n^{(0)}$ и $H_n^{(1)}$ нам неизвестен. Вероятно, первые связаны с неживой природой (геологическая форма движения материи и другие, более «ранние» формы), а вторые – с явлениями, которые выходят за рамки современных знаний о психики человека.

По существу, разложение «психоистории» $H(t)$ в ряд гармоник реализует известную идею о цикличности процессов в природе и обществе. Вместе с тем постулируемая временная зависимость коэффициентов $H_n(t)$ означает модулирование циклического процесса, что позволяет сочетать идеи повторяемости и изменяемости. Функции $H_n(t)$ должны удовлетворят дифференциальным уравнениям, характеризующим динамику соответствующей подсистемы «психоистории», каковыми являются биосфера, этносфера, социосфера, социальная психосфера и антропосфера. В книге [3] приведены возможные уравнения для биосферных (экологических), этнических и социальных процессов. Попытаемся понять, каковыми могут быть дифференциальные уравнения, описывающие динамику коллективных социально-психических систем.

Динамика глобальной психоисторической системы определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{Б}}{dt} = \mathbf{f}_{\mathbf{Б}}(t, \mathbf{Б}, \mathbf{R}), \tag{1}$$
$$\frac{d\mathbf{Э}}{dt} = \mathbf{f}_{\mathbf{Э}}(t, \mathbf{Б}, \mathbf{Э}), \tag{2}$$
$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{f}_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{Б}, \mathbf{Э}, \mathbf{S}, \mathbf{R}), \tag{3}$$
$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{f}_{\mathbf{R}}(t, \mathbf{Б}, \mathbf{Э}, \mathbf{S}, \mathbf{R}), \tag{4}$$

где $\mathbf{Б} = (Б_{n_0+1}, ..., Б_{n_1}), \mathbf{Э} = (Э_{n_1+1}, ..., Э_{n_2})$, $\mathbf{S} = (S_{n_2+1}, ..., S_{n_3}), \mathbf{R} = (R_{n_3+1}, ..., R_{n_4})$. Полный вид первых трех уравнений без учета социальной психологии приведен в [3]. Смысл компонент функций $\mathbf{Б}, \mathbf{Э}, \mathbf{S}$ устанавливается на основе теорий В.И. Вернадского, Л.Н. Гумилева и Т. Парсонса (см. [3] или [4]). Ниже выясняется смысл компонент функции $\mathbf{R}$.

2. Уравнения коллективной рефлексологии

И.М. Сеченов в своих замечательных работах «Рефлексы головного мозга» и «Кому и как разрабатывать психологию?» [5] достаточно аргументированно объяснил, что психические процессы следует рассматривать как нервные. Другими словами, психические процессы мы должны описывать как цепи последовательных рефлексов, т.е. откликов организма на внешние воздействия. Развивая эти идеи, В.М. Бехтерев создал рефлексологию и, что особенно ценно для наших целей, коллективную рефлексологию [6].

По существу, В.М. Бехтерев сводит психологию к физиологии, и это не следует рассматривать как недостаток. Напротив, вместо того, чтобы воздвигать препятствия на пути математизации и, следовательно, придания психологии характера точной науки, И.М.Сеченов сделал первый шаг в этом направлении, заявив о необходимости основываться в построении научной психологии на естествознании, и, в частности, на физиологии. Против такого подхода, как правило, используется аргумент о невозможности сведения всего богатства человеческой психики к физиологическим и биологическим процессам. Почти такие же возражения используются против теории этногенеза Л.Н. Гумилёва. В сущности, здесь имеет место, увы, традиционное противоборство «физиков» и «лириков», т.е. противоборство точных методов, присущих представителям естествознания, и интуитивных, присущих представителям гуманитарных наук. Опыт человечества показывает, что первые, как правило, расширяют область приложения своих методов, а вторые уступают свои позиции. Однако если человечество обречено на бесконечное познание, то следует признать, что владения первых всегда будут конечными, а вторых – бесконечно обширными. На фоне успехов в изучении природы точные исследования в сфере общества явно пробуксовывали, но связано это было с тем, что не было инструмента анализа сложных систем. Думается, что ошеломляющий прогресс в области компьютерной техники и возможности компьютерного моделирования (simulation) позволят добиться существенного продвижения в изучении общества.

Итак, не ставится под сомнение, что группы людей или общество в целом совершают те или иные коллективные действия в ответ на изменения, происходящие во внешнем мире. Эти действия называются *коллективными рефлексами.* Следуя В.М. Бехтереву, перечислим коллективные рефлексы: наследственно-органические рефлексы I (инстинкты), коллективное настроение n и коллективные мимико-соматические рефлексы m, коллективное сосредоточение c и коллективное наблюдение N , коллективное творчество t , и, наконец, согласованные коллективные действия Δ.

Таким образом, $R_{n_3+1} = I, R_{n_3+2} = n, R_{n_3+3} = m, R_{n_3+4} = c$, $R_{n_3+5} = N, R_{n_3+6} = t, R_{n_3+7} = R_{n_4} = \Delta$, а уравнение (4) по аналогии с видом уравнений, принятых в [3], – это система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= k_{II}I + k_{In}n + k_{Im}m + k_{Ic}c + k_{IN}N + k_{It}t + k_{I\Delta}\Delta \\
\frac{dn}{dt} &= k_{nI}I + k_{nn}n + k_{nm}m + k_{nc}c + k_{nN}N + k_{nt}t + k_{n\Delta}\Delta \\
\frac{dm}{dt} &= k_{mI}I + k_{mn}n + k_{mm}m + k_{mc}c + k_{mN}N + k_{mt}t + k_{m\Delta}\Delta \\
\frac{dc}{dt} &= k_{cI}I + k_{cn}n + k_{cm}m + k_{cc}c + k_{cN}N + k_{ct}t + k_{c\Delta}\Delta \\
\frac{dN}{dt} &= k_{NI}I + k_{Nn}n + k_{Nm}m + k_{Nc}c + k_{IN}N + k_{Nt}t + k_{N\Delta}\Delta \\
\frac{dt}{dt} &= k_{tI}I + k_{tn}n + k_{tm}m + k_{tc}c + k_{tN}N + k_{tt}t + k_{t\Delta}\Delta \\
\frac{d\Delta}{dt} &= k_{\Delta I}I + k_{\Delta n}n + k_{m}m + k_{\Delta c}c + k_{\Delta N}N + k_{\Delta t}t + k_{\Delta\Delta}\Delta
\end{aligned}
$$

Коэффициенты $k_{..} = k_{..}(\mathbf{Б}, \mathbf{Э}, \mathbf{S}, I, n, m, N, t, c, \Delta)$ определяют зависимость рефлекторной деятельности коллективов от: 1) внешней природной среды **Б** (например, от наличия пищи или природной стихии в виде, скажем, засухи); 2) культурно-этнического окружения **Э** (падение пассионарного напряжения естественным образом отражается на поведении людей, входящих в этнос); 3) изменений политико-экономической ситуации в обществе. Однако, учитывая значительную величину биологических и этнических «длин волн», о чем говорилось в § 1, следует брать во внимание только нетипичные (быстро протекающие) явления в поведении биосферы и этносферы.

Очевидно, что зависимость (или независимость) конкретного коэффициента $k_{..}$ от того или иного коллективного рефлекса – отвечает возможности одного рефлекса породить другой, т.е. рефлекс как реакция, социальное действие, становится раздражителем и приводит в движение другой коллективный рефлекс. Например, коллективное сосредоточение, имевшее место у толпы при заслушивании оратора на митинге становится причиной рефлекса согласованных коллективных действий, выразившихся в «бурных и продолжительных аплодисментах» или в участии в уличных беспорядках. Точный вид всех коэффициентов $k_{..}$ еще предстоит выяснить.

Как решается вопрос о моделировании принятия элитой решения, кардинально меняющего ситуацию внутри данного общества или отношения между государствами (например, вступление в войну)? В первом приближении следует принять, что элита состоит из пассионариев, которые на момент принятия кардинального решения оставляют в стороне внутренние разногласия (при моделировании гражданской войны пассионариев, как и гармоничных людей, надо разделить на две группы (у субпассионариев деление вряд ли целесообразно)). В таком случае для кардинального решения необходимо наличие однополярных согласованных коллективных действий у пассионариев, гармоничных людей и даже субпассионариев. Таким образом, если $\Delta_P, \Delta_M, \Delta_S$ – уровень согласованных коллективных действий соответственно пассионариев (элиты), гармоничных людей (народных масс) и субпассионариев (бродяги, бомжи и пр.), то условие принятия кардинального решения в момент времени t имеет, например, следующий вид:

$$sign\left(\frac{d\Delta_P}{dt}\right) sign\left(\frac{d\Delta_M}{dt}\right) sign\left(\frac{d\Delta_S}{dt}\right) > 0.$$

Сущность данного совместного коллективного рефлекса согласованных коллективных действий, именуемого выше принятием кардинального решения, в том, что порождается некоторое социальное действие, направленное во имя торжества «добра» или «зла». Что же конкретно восторжествует? На уровне коллективных рефлексов, т.е. «коллективной физиологии», на такой вопрос ответить нельзя. Нужны нравственные критерии. Но последние относятся уже к «высшей сфере» психоистории – антропосфере, которая в данной статье не рассматривается. Но думается, что «добро» и «зло» должны моделироваться в математической антропологии временными функциями $Д(t)$ и $З(t)$, сравнение численных значений которых в момент времени t и определяет нравственный характер совместного коллективного рефлекса согласованных коллективных действий, имевших место в данный момент истории данного народа. При этом, для уточнения, какое из них «добро», какое «зло», полезно иметь в виду, что на социальном уровне, в социосфре, описываемой в духе Т. Парсонса [3], выделена функция $\lambda(t)$, характеризующая уровень социальной интеграции или механической солидарности по Дюркгейму, и поставленная в соответствие системе поддержания институциальных этнических образцов, которые у каждого народа задают нормы общественного поведения (по крайней мере, на этапе зарождения и подъема этноса). Очевидно, что «добро» $Д(t)$ и функция $\lambda(t)$ должны коррелировать, как-то согласовываться на раннем этапе развития этноса. Естественно считать, что представление о «добре» – общечеловеческое достижение, и на ранних этапах развития любого этноса оно одно и то же – одно для всех.

Автор выражает глубокую признательность социологу И.А. Огородниковой за консультации и указание на работы В.М. Бехтерева по социальной психологии.

Литература

1. Гумилев Л.Н. *От Руси к России. Очерки этнической истории.* – М.: Экопрос, 1992.

2. Гуц А.К. *Религия: истина для сердца вместо знания для ума* // Взаимосвязь физической и религиозной картин мира. Физики-теоретики о религии. – Кастрома: Из-во МИИЦАОСТ, 1996. – С.32-43.

3. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология.* – Омск: ОмГУ, 1997. - 212 с.

4. Моделирование социальных и этнических процессов // Web-site в Интернет http://www.univer.omsk.su/MEP/

5. Сеченов И.М. *Избранные произведения.* – М., 1958.

6. Бехтерев В.М. *Избранные работы по социальной психологии.* – М.: Наука, 1994.

7. Бехтерев В.М. *Объективная психология.* – М.: Наука, 1991.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.54-59.

УДК 621.317

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК В МНОГОШКАЛЬНОМ ИЗМЕРИТЕЛЕ

Д.Н. Лавров

The joint density function of errors in multi scale a measuring device is deduced by a method of a maximum entropy. Is shown, that this density function is well approximated by a truncated normal density function, which is usually used for a construction of estimations.

1. Введение

Традиционно в работах по многошкальным фазовым измерителям [1, 2, 5] для получения максимально правдоподобной оценки волнового вектора используется усеченная гауссовская плотность

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right)}{\int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ – $(n \times n)$-обратная матрица к корреляционной матрице ошибок измерения разностей фаз; $(\,\cdot\,)^\top$ – операция транспонирования; Ω – гиперкуб,

$$\Omega = \left\{\mathbf{x} : |x_i| \le 0.5,\, i = \overline{1,n}\right\}, \tag{2}$$

так что $\int_\Omega = \int_{-0.5}^{0.5} \ldots \int_{-0.5}^{0.5}$. В обоснование выбора такой плотности указывается, что она является хорошим приближением к известным плотностям ошибок фазовых измерений.

Целью данной работы является вывод уравнений для определения совместной плотности распределения ошибок измерения фаз методом максимальной энтропии при известной корреляционной матрице. Известно, что такая плотность соответствует случайному вектору, реализующемуся природой «наибольшим числом способов» [3]. Будет показано, что при определенных условиях усеченная плотность хорошо аппроксимирует плотность с максимальной энтропией. Таким образом, будет дано теоретическое обоснование выбора усеченной гауссовской плотности в качестве плотности распределения ошибок.

E-mail: lavrov@univer.omsk.su

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретный случайный вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ размерности n. Каждому значению вектора из конечного подмножества, состоящего из N^n-элементов, области Ω, сопоставлена вероятность принятия компонентами ε_i возможных значений x_{i_j}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$. Обозначим эту вероятность через $p_{i_1,\,...,\,i_n} = P(\varepsilon_1 = x_{i_1}, \ldots, \varepsilon_n = x_{i_n})$. Для краткости, вместо $i_1, \ \ldots, \ i_n$ будем писать α, подразумевая под α мультииндекс, так что $p_{i_1,\,...,\,i_n} = p_\alpha$ и $\sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_n=1}^N = \sum_\alpha$.

Энтропия такого случайного вектора

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = -\sum_\alpha p_\alpha \ln p_\alpha. \tag{3}$$

Введем дополнительные ограничения, первое из которых — условие нормировки:

$$\sum_\alpha p_\alpha = 1. \tag{4}$$

В многошкальных фазовых измерителях обычно известна корреляционная матрица ошибок измерения (или её структура), поэтому вторым условием принимаем равенство

$$\mathbf{R} = \sum_\alpha \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^\top p_\alpha, \tag{5}$$

где $\mathbf{R}$ – корреляционная матрица ошибок измерения, $\mathbf{R} = \mathbf{B}^{-1}$. Наша задача состоит в нахождении вероятностей p_α, максимизирующих (3) при заданных ограничениях (4), (5). Для получения плотности необходимо перейти к непрерывным случайным величинам, устремив N к бесконечности. О корректности такого перехода см. [4, с.326].

3. Вывод основных соотношений

Для нахождения p_α воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа задачи (3), (4), (5):

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\sum_\alpha p_\alpha \ln p_\alpha + \lambda \left(\sum_\alpha p_\alpha - 1 \right) + Sp \left(\sum_\alpha \boldsymbol{M} \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^\top p_\alpha - \boldsymbol{M}\mathbf{R} \right), \tag{6}$$

где λ – скалярный множитель, и $\boldsymbol{M}$ – $(n \times n)$-квадратная симметрическая матрица множителей; $Sp(\ \cdot\ )$ – операция взятия следа матрицы.

Продифференцировав (6) по p_α, получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial p_\beta} = -(\ln p_\alpha + 1) + \lambda + \mathbf{x}_\alpha^\top \boldsymbol{M} \mathbf{x}_\alpha.$$

Приравняв к нулю последнее выражение, после несложных преобразований

$$p_\beta = \exp\left(\lambda + \mathbf{x}_\alpha^\top \boldsymbol{M} \mathbf{x}_\alpha - 1\right). \tag{7}$$

Подставим (7) в условие нормировки и найдем выражение для λ :

$$\lambda = 1 + \ln \sum_{\alpha} \exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}.$$

Тогда (7) перепишется в виде:

$$p_{\beta} = \frac{\exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \exp \mathbf{x}_{\alpha}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}_{\alpha}}. \tag{8}$$

Переходя к непрерывным случайным величинам, получим из (8) выражения для плотности, из (5) – условие на корреляционную матрицу:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right)}{\int_{\Omega} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}} \tag{9}$$

$$\mathbf{R} \int_{\Omega} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{x}\mathbf{x}^{\top} \exp\left(\mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{M} \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}. \tag{10}$$

Аналитическое решение (10) относительно $\boldsymbol{M}$ возможно только в ряде специальных случаев. Так, если областью интегрирования является все пространство (бесконечные пределы интегрирования), то очевидно, что $\boldsymbol{M} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}$ и плотность (9) есть многомерная гауссовская. Свойство гауссовского распределения максимизировать энтропию известно давно и носит название экстремального свойства [4].

В нашем случае областью интегрирования является гиперкуб, определяемый выражением (2). Одномерный случай ($n = 1$) рассмотрен в [6], где показано, что $\boldsymbol{M}$, как скалярный параметр, можно вычислить посредством процесса простой итерации. Причем при начальном условии $\boldsymbol{M} = 0$ первым приближением является $-\frac{1}{2\sigma^2}$; σ^2 – дисперсия ошибки измерения фаз. Из результатов [6] следует, что при независимых компонентах случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ первым приближением к $\boldsymbol{M}$ будет $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$.

4. Численное исследование аппроксимации плотности с максимальной энтропией усеченной гауссовской

Использование (9), (10) для построения максимально правдоподобной оценки волнового вектора возможно, но вряд ли практически ценно, так как каждый раз при изменении размерности вектора, типа формирования фазометрических баз или дисперсии ошибки необходимо решить нелинейное уравнение (10) относительно $\boldsymbol{M}$, что является сложной вычислительной задачей. С другой

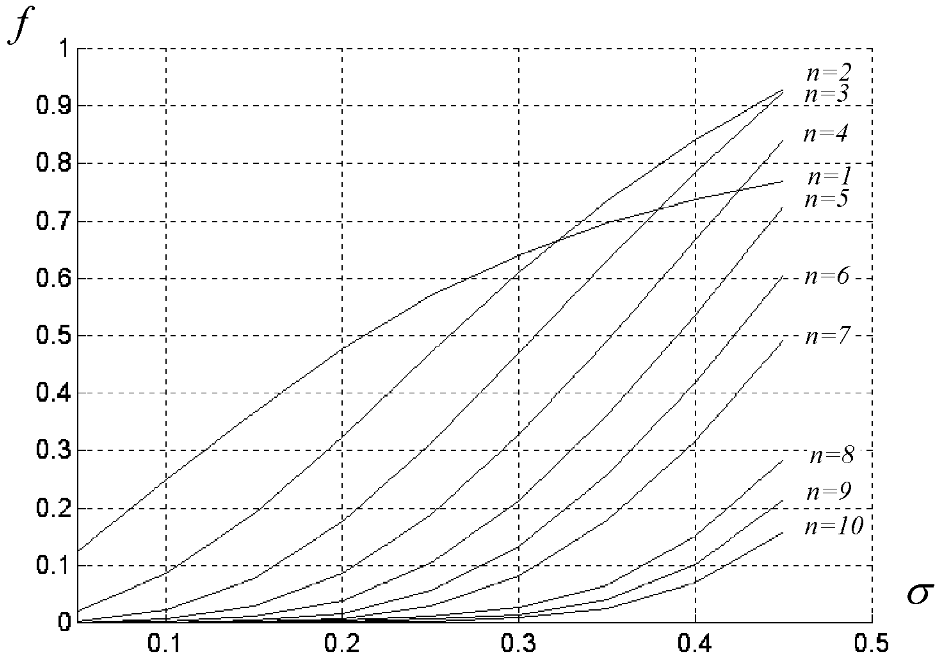

Рис. 1. Графики функции рассогласования

стороны, на основании случая одномерного, случая с независимыми компонентами вектора ошибок и самого вида плотности есть основания полагать, что при малых дисперсиях ошибок хорошим приближением остается $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$.

Рассмотрим практически важный вариант построения измерительной системы – фазовый измеритель с опорной антенной [2], состоящий из однотипных элементов, так что компоненты вектора ошибок измерения имеют одинаковую дисперсию σ^2, а корреляционная матрица

$$\mathbf{R} = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{n} = \begin{cases} \sigma^2, & \textit{если} \quad i = j \\ \sigma^2/2, & \textit{если} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Проверим, насколько сильно не выполняется условие (10), если $\boldsymbol{M} = -\frac{1}{2}\mathbf{B}$. Для этого рассмотрим функцию рассогласования

$$f(\sigma) = \left\| \mathbf{R} \int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{x}\mathbf{x}^\top \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \right\|_E, \qquad (11)$$

где $\|\cdot\|_E$ – евклидова норма матрицы. Легко упростить (11) до

$$f(\sigma) = \sqrt{n s_1^2 + n(n-1)s_2^2},$$

где

$$s_1 = r_{1,1} \int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x},$$

$$s_2 = r_{1,2} \int_\Omega x_1 x_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{B}\mathbf{x}\right) d\mathbf{x}.$$

Таким образом, вычисление (11) сводится к вычислению трех (n)-кратных интегралов.

На рис.1 представлены графики $f(\sigma)$ при различных значениях n, $n = \overline{1,10}$. По горизонтальной оси отложены значения σ, а по вертикальной – значения функции.

На основании проведенных вычислений можно сделать следующие выводы:

1) при малых дисперсиях усеченная плотность хорошо аппроксимирует плотность с максимальной энтропией, так как матрица $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$ практически удовлетворяет соотношению (10);

2) при увеличении размерности случайного вектора влияние замены $\boldsymbol{M}$ на приближенное значение $-\frac{1}{2}\mathbf{B}$ снижается, то есть пороговое значение дисперсии, после которого резко падает качество аппроксимации, увеличивается.

5. Заключение

В работе получены соотношения, определяющие экстремальную совместную плотность (то есть плотность с максимумом энтропии из всевозможных плотностей с заданной корреляционной матрицей) распределения ошибок в многошкальной фазовой измерительной системе. При малых дисперсиях эта плотность хорошо аппроксимируется усеченной гауссовской плотностью, которая обычно используется для построения максимально правдоподобной оценки.

Отметим, что при выводе соотношений для плотности не использовались никакие априорные данные, кроме знания корреляционной матрицы. То есть, при отсутствии априорных сведений о распределении ошибки следует строить оценку на экстремальном распределении как соответствующему случайному вектору, реализующемуся природой «наибольшим числом способов».

Литература

1. Белов В.И. *Теория фазовых измерительных систем* / Под. ред. проф. Г.Н.Глазова. – Томск: ТГАСУР, 1994. С.144.

2. Денисов В.П. *О потенциальной точности фазового пеленгатора с антенной системой в виде линейной решетки* // Радиотехника и электроника. 1978. Т.35. N 8. С.1631-1636.

3. Джейнс Э.Т. *О логическом обосновании метода максимальной энтропии* // ТИИЭР. 1982. Т.70. N 9. С.33-51.

4. Пугачев В.С. *Введение в теорию вероятностей.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968.

5. Поваляев В.П. *Плотность вероятности максимально правдоподобной оценки параметра в двушкальном измерительном устройстве* // Радиотехника и электроника. 1976. Т.21. N 5. С.1087-1090.

6. Лавров Д.Н. *Плотность с максимальной энтропией ошибки измерения фазы* // Вестник Омского университета. 1997. N 4.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.60-71.

УДК 519.711.3

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ

Н.В. Перцев

A stochastic model of interacting populations of the particles with a limited life span is concidered. The population – size and age – dependent branching process is used for the construction the model equations. The Monte – Carlo approach for the simulation the population dynamics is presented here.

1. Введение

Вероятностные модели широко применяются при изучении динамики популяций в задачах биологии, экологии, демографии и во многих других областях естествознания. В приложениях часто рассматриваются совокупности клеток, группы молекул, особи нескольких конкурирующих видов, население различных возрастных групп, технические устройства и т. д. Все эти объекты моделирования будем обозначать в дальнейшем термином «частицы». Для построения вероятностных моделей динамики популяций используется аппарат теории случайных процессов, который подробно описан в большом количестве работ (см., например, [1] – [10]). Во многих случаях динамика моделируемых популяций существенным образом зависит от следующих факторов : 1) взаимодействие между собой частиц различных видов разного возрастного состава; 2) старение частиц и их гибель при достижении определенного возраста; 3) рождение новых частиц за счет существующих частиц, причем одна частица на протяжении своей жизни может порождать некоторое количество новых частиц. Учет указанных факторов приводит к значительным сложностям при построении моделей динамики популяций и, как следствие, не позволяет в полной мере использовать известные аналитические методы для их исследования. В этих случаях для проведения расчетов можно применять метод Монте – Карло [11], ориентированный на реализацию моделей в виде программ для высокопроизводительных ЭВМ.

В настоящей работе описывается вероятностная модель динамики популяций взаимодействующих частиц с ограниченным временем жизни. Модель

E-mail: perts@omsk.edu

представляет собой разновидность марковского случайного процесса, состояниями которого являются точечные распределения, характеризующие возрастной состав популяций частиц различных видов. Построены рекуррентные соотношения, которые задают правило перехода из одного состояния в другое за некоторый промежуток времени. На основе этих соотношений разработан алгоритм статистического моделирования на ЭВМ динамики рассматриваемых популяций частиц. Указаны примеры применения представленной модели.

2. Описание модели

Будем рассматривать популяции, которые состоят из частиц видов A_1, $A_2, ...,$ A_m. Принимаем, что каждая частица на протяжении своей жизни может участвовать в различных взаимодействиях с частицами других видов. Интенсивности взаимодействий пропорциональны количеству участвующих в них частиц определенного возраста. В результате осуществления взаимодействия частицы могут сохраниться или погибнуть, одновременно с этим возможно рождение новых частиц нулевого возраста. Предполагаем также, что за время своей жизни либо в конце жизни частицы могут порождать новые частицы нулевого возраста.

Пусть $0 < \tau_i < \infty$ означает максимально допустимую продолжительность времени жизни частиц вида $A_i, 1 \leq i \leq m$. Для учета возрастного состава популяций частиц вида A_i разобьем промежуток $[0, \tau_i]$ на $l_i + 1$ частичных промежутков с помощью точек $0 = \tau_i^{(0)} < \tau_i^{(1)} < ... < \tau_i^{(k)} < ... < \tau_i^{(l_i+1)} = \tau_i, 1 \leq i \leq m$. Взаимодействие частиц между собой, изменение возрастного состава частиц и их гибель вследствие старения будем записывать в виде следующей схемы :

$$A_i^{(s_{ik})} \overset{\tau_i^{(k)}}{\to} A_i^{(s_{ik+1})}, \quad 0 \leq k \leq l_i, \quad A_i^{(\tau_i)} \overset{\tau_i}{\to} W_{\rho_i}^{(0)}, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{1}$$

$$U_{\alpha_j}^{(s_j)} \overset{r_j}{\to} V_{\beta_j}^{(s_j+\delta_j)} + W_{\gamma_j}^{(0)}, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2}$$

В соотношении (1) первое выражение означает, что частицы вида A_i возраста s_{ik} такого, что $\tau_i^{(k)} \leq s_{ik} < \tau_i^{(k+1)}$, с течением времени переходят в следующую возрастную категорию, $0 \leq k \leq l_i, 1 \leq i \leq m$. Второе выражение в (1) указывает на то, что частицы вида A_i, достигшие предельного возраста τ_i, погибают, порождая при этом совокупность частиц $W_{\rho_i}^{(0)}, 1 \leq i \leq m$. Совокупность $W_{\rho_i}^{(0)} = \rho_{i1}A_1^{(0)} + \rho_{i2}A_2^{(0)} + ... + \rho_{im}A_m^{(0)}$ состоит из ρ_{i1} частиц вида A_1, ρ_{i2} частиц вида A_2, ... , ρ_{im} частиц вида A_m нулевого возраста, $1 \leq i \leq m$. Параметры ρ_{ij} могут принимать неотрицательные целочисленные значения, $1 \leq i, j \leq m$. Если для фиксированного $1 \leq i \leq m$ окажется, что $\rho_{i1} = \rho_{i2} = ... = \rho_{im} = 0$, то будем писать, что $W_{\rho_i}^{(0)} = D$, понимая под D совокупность погибших частиц всех видов.

Соотношение (2) означает, что частицы видов $A_1, A_2, ..., A_m$ участвуют в n различных взаимодействиях между собой с интенсивностями $r_j > 0, 1 \leq j \leq n$. При фиксированном $1 \leq j \leq n$ совокупность частиц $U_{\alpha_j}^{(s_j)} = \alpha_{j1}A_1^{(s_{j1})} +$

$\alpha_{j2}A_2^{(s_{j2})} + ... + \alpha_{jm}A_m^{(s_{jm})}$, в которую входит по α_{ji} частиц вида A_i возраста s_{ji}, $0 \le a_{ji} \le s_{ji} < b_{ji} \le \tau_i, 1 \le i \le m$, в течение некоторого промежутка времени δ_j может осуществить взаимодействие между собой, $1/r_j$ задает среднее значение δ_j. В результате осуществления взаимодействия совокупность $U_{\alpha_j}^{(s_j)}$ переходит в совокупность частиц $V_{\beta_j}^{(s_j+\delta_j)} = \beta_{j1}A_1^{(s_{j1}+\delta_j)} + \beta_{j2}A_2^{(s_{j2}+\delta_j)} + ... + \beta_{jm}A_m^{(s_{jm}+\delta_j)}$ соответствующего возраста $s_{ji} + \delta_j$, $0 \le a_{ji} \le s_{ji} + \delta_j < b_{ji} \le \tau_i, 1 \le i \le m$, и порождает совокупность частиц $W_{\gamma_j}^{(0)} = \gamma_{j1}A_1^{(0)} + \gamma_{j2}A_2^{(0)} + ... + \gamma_{jm}A_m^{(0)}$ нулевого возраста. Параметры γ_{ji} могут принимать неотрицательные целочисленные значения, а параметры α_{ji}, β_{ji} – значения 0 или 1, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. При фиксированном $1 \le j \le n$ должны выполняться неравенства $\beta_{ji} \le \alpha_{ji}, 1 \le i \le m$, причем, если $\gamma_{j1} = \gamma_{j2} = ... = \gamma_{jm} = 0$, то среди последних неравенств хотя бы одно должно быть строгим. Если для некоторого $1 \le j \le n$ окажется, что $\beta_{ji} = \gamma_{ji} = 0, 1 \le i \le m$, то будем писать, что $V_{\beta_j}^{(s_j+\delta_j)} + W_{\gamma_j}^{(0)} = D$.

В соотношении (2) может встречаться запись $A_i^{(s_{ii})} \xrightarrow{r_i} D$, которая означает, что частица вида A_i определенного возраста s_{ii}, погибает в результате взаимодействия с факторами, которые в модели явно не учитываются, $1 \le i \le m$. Такая гибель может быть также связана с эмиграцией частицы или ее превращением в частицы некоторых видов, которые в модели не рассматриваются. Гибель частиц в результате осуществления взаимодействий различных типов приводит к тому, что некоторые частицы вида A_i могут не достигать своего предельного возраста $\tau_i, 1 \le i \le m$. Кроме того, в (2) может содержаться запись $A_k^{(s_{kk})} \xrightarrow{r_k} A_k^{(s_{kk}+\delta_k)} + W_{\gamma_k}^{(0)}, 1 \le k \le m$. Эта запись означает, что за время своей жизни частица вида A_k некоторого возраста s_{kk} может порождать совокупности $W_{\gamma_k}^{(0)}$ частиц нулевого возраста, $1 \le k \le m$.

Состояния популяции частиц вида A_i будем описывать с помощью точечных распределений $\omega_i^{(k)}(t)$, которые в некоторый момент времени t отражают возрастной состав этой популяции, $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m, t_0 \le t \le T$, где $[t_0, T]$ – промежуток времени, на котором изучается динамика рассматриваемых популяций. В фиксированный момент времени t точечное распределение $\omega_i^{(k)}(t)$ имеет следующую структуру :

$$\omega_i^{(k)}(t) = \{(t_{i1} + \tau_i^{(k+1)}, n_{i1}^{(k)}(t)), ..., (t_{ij} + \tau_i^{(k+1)}, n_{ij}^{(k)}(t)), ..., (t_{ij_k} + \tau_i^{(k+1)}, n_{ij_k}^{(k)}(t))\},$$

$$0 \le k \le l_i, \quad 1 \le i \le m, \tag{3}$$

где $t_{i1} < ... < t_{ij}... < t_{ij_k} \le t$ – моменты рождения частиц вида A_i нулевого возраста, $t_{ij} + \tau_i^{(k+1)}$ – моменты перехода частиц вида A_i, имеющих возраст $s_{ij} = t - t_{ij}, \tau_i^{(k)} \le s_{ij} < \tau_i^{(k+1)}$, в следующую возрастную категорию, $1 \le j \le j_k, 0 \le k < l_i, 1 \le i \le m$. Если $k = l_i$, то $t_{ij} + \tau_i^{(l_i+1)} = t_{ij} + \tau_i$ означают моменты гибели частиц вида A_i при достижении ими предельного возраста $\tau_i, 1 \le j \le j_k, 1 \le i \le m$. Положительные величины $n_{ij}^{(k)}(t)$ означают количество частиц указанного выше возраста $s_{ij}, 1 \le j \le j_k, 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. Эти величины задаются в моменты t_{ij} по совокупностям $W_{\rho_i}^{(0)}$, $W_{\gamma_i}^{(0)}$ родившихся частиц нулевого возраста, а затем с течением времени они могут уменьшаться вследствие участия частиц в различных совокупностях U_{α_j} взаимодействующих частиц, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. При фиксированном $1 \le i \le m$ величина $1 \le j_k < \infty$ задает количество элементов, входящих в точечное распределение $\omega_i^{(k)}(t)$, а сумма $n_{i1}^{(k)}(t) + n_{i2}^{(k)}(t) + ... + n_{ij_k}^{(k)}(t) = x_i^{(k)}(t)$ означает общее количество существующих в момент времени t частиц, имеющих возраст s_i, такой, что $\tau_i^{(k)} \le s_i < \tau_i^{(k+1)}, 0 \le k \le l_i$. Если в некоторый момент t частицы вида A_i отсутствуют, т. е. $j_k = 0, x_i^{(k)}(t) = 0$, то $\omega_i^{(k)}(t)$ будем называть нулевым точечным распределением и писать, что $\omega_i^{(k)}(t) = \emptyset, 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. Отметим, что в ненулевых точечных распределениях (3) все элементы упорядочены по своим первым компонентам. В последующих выкладках будем предполагать, что в течение промежутка времени $[t_0, T]$ число частиц всех видов конечно.

Опишем далее события, которые могут приводить к изменениям точечных распределений (3). Зафиксируем момент времени t и точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t), 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m, t_0 \le t \le T$. Примем, что за интервал времени $(t, t+h)$ любая совокупность $U_{\alpha_j}^{(s_j)}$ частиц определенного возраста s_j независимо от других существующих частиц и предшествующих событий взаимодействует между собой с вероятностью $r_j h + o(h), h \to 0, 1 \le j \le n$. Вероятность взаимодействия нескольких таких групп равна $o(h)$. Вероятности осуществления различных типов взаимодействия частиц за интервал $(t, t+h)$ будем задавать следующими соотношениями. Вероятность того, что за $(t, t+h)$ произойдет ровно L взаимодействий j – го типа равна $o(h)$ при $L \ge 2$ и $q_j(x(t))h + o(h)$ при $L = 1, h \to 0$, где

$$q_j(x(t)) = r_j \prod_{i=1, \alpha_{ji} \ne 0}^{m} x_i(t, a_{ji}, b_{ji}), \quad 1 \le j \le n. \tag{4}$$

Вероятность того, что за интервал $(t, t+h)$ не произойдет взаимодействия ни одного из n типов равна $1 - Q(x(t))h + o(h), h \to 0$, где

$$Q(x(t)) = \sum_{j=1}^{m} q_j(x(t)). \tag{5}$$

В формуле (4) величина $x_i(t, a_{ji}, b_{ji})$ означает количество частиц вида A_i определенного возрастного диапазона $0 \le a_{ji} \le s_{ji} < b_{ji} \le \tau_i, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. В частности, величина $x_i(t) = x_i(t, 0, \tau_i)$ задает общее количество частиц вида $A_i, 1 \le i \le m$. Примем, что при фиксированном $1 \le j \le n$ промежуток $[a_{ji}, b_{ji})$ включает в себя один или несколько частичных промежутков $[\tau_i^{(k)}, \tau_i^{(k+1)})$, иначе,

$$[a_{ji}, b_{ji}) = \bigcup_{k \in F_{ji}} [\tau_i^{(k)}, \tau_i^{(k+1)}), \quad 1 \le i \le m, \tag{6}$$

где $F_{ji} = \{k : e_{ji} \le k \le d_{ji}\}, 0 \le e_{ji} \le d_{ji} \le l_i$ – заданы, $1 \le i \le m$. Заметим при этом, что

$$x_i(t, a_{ji}, b_{ji}) = \sum_{k \in F_{ji}} x_i^{(k)}(t), \quad 1 \le i \le m. \tag{7}$$

Определим случайную величину $\psi(t)$ как продолжительность времени до первого осуществления одного из n типов взаимодействия частиц между собой, начиная с момента t. Предполагаем, что на промежутке $[t, t+\psi(t)]$ не происходит никаких событий, приводящих к изменениям точечных распределений (3), за исключением того, что в момент $t+\psi(t)$ осуществляется взаимодействие частиц с номером $\nu(t)$. Возраст всех частиц, существующих в момент t, увеличивается на величину $\psi(t)$. Если $Q(x(t)) > 0$, то величина $\psi(t)$ имеет экспоненциальное распределение

$$P\{\psi(t) > s\} = \exp(-Q(x(t))s), \quad s \geq 0, \tag{8}$$

а величина $\nu(t)$ задается законом распределения

$$P\{\nu(t) = j\} = q_j(x(t))/Q(x(t)), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{9}$$

при условии, что взаимодействие частиц произошло.

При фиксированном $1 \leq i \leq m$ во взаимодействии с номером $\nu(t)$ могут принимать участие частицы вида A_i возраста $a_{\nu(t)i} \leq s_i < b_{\nu(t)i}$, причем участие любой из таких частиц предполагается равновероятным. Из (6) и (7) следует, что в данном взаимодействии участвует частица из возрастного диапазона с номером $k_{\nu(t)i}$, который имеет закон распределения

$$P\{k_{\nu(t)i} = k\} = x_i^{(k)}(t)/x_i(t, a_{\nu(t)i}, b_{\nu(t)i}), \quad k \in F_{\nu(t)i}, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{10}$$

Для фиксированного $k_{\nu(t)i}$ в точечном распределении $\omega_i^{(k_{\nu(t)i})}(t)$ указанной частице соответствует элемент

$$\Delta_{\nu(t)i}^{(k_{\nu(t)i})}(t) = (t_{ig_{\nu(t)i}} + \tau_i^{(k_{\nu(t)i}+1)}, n_{ig_{\nu(t)i}}^{(k_{\nu(t)i})}(t)),$$

порядковый номер которого $g_{\nu(t)i}$ является случайной величиной с распределением

$$P\{g_{\nu(t)i} = g\} = n_{ig}^{(k_{\nu(t)i})}(t)/x_i^{(k_{\nu(t)i})}(t), \quad g = 1, 2, ..., j_{k_{\nu(t)i}}, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{11}$$

Определим элемент $\sigma_{\nu(t)i}^{(k)}(t)$ по правилу :

$$\sigma_{\nu(t)i}^{(k)}(t) = (t_{ig_{\nu(t)i}} + \tau_i^{(k_{\nu(t)i}+1)}, n_{ig_{\nu(t)i}}^{(k_{\nu(t)i})}(t) - 1),$$

если $\alpha_{\nu(t)i} = 1, \quad \beta_{\nu(t)i} = 0, \quad k = k_{\nu(t)i}$ и $\sigma_{\nu(t)i}^{(k)}(t) = \emptyset$ в остальных случаях, $0 \leq k \leq l_i, 1 \leq i \leq m$. Пренебрегая рождением частиц нулевого возраста, можно записать, что точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t)$ в момент $t+\psi(t)$ переходят в точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t+\psi(t))$, задаваемые соотношениями :

$$\omega_i^{(k)}(t) \to \omega_i^{(k)}(t+\psi(t)) = \omega_i^{(k)}(t) \nabla \sigma_{\nu(t)i}^{(k)}(t), \quad 0 \leq k \leq l_i, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{12}$$

Символ "∇" в (12) означает, что в случае $\alpha_{\nu(t)i} = 1, \beta_{\nu(t)i} = 0, k = k_{\nu(t)i}$ элемент $\Delta_{\nu(t)i}^{(k_{\nu(t)i})}(t)$ точечного распределения $\omega_i^{(k)}(t)$ при $n_{ig_{\nu(t)i}}^{(k_{\nu(t)i})}(t) > 1$ заменяется на элемент $\sigma^{(k)}_{\nu(t)i}(t)$, а при $n^{(k_{\nu(t)i})}_{ig_{\nu(t)i}}(t) = 1$ он исключается из $\omega^{(k)}_i(t), 1 \le i \le m$. Если же $\sigma^{(k)}_{\nu(t)i}(t) = \emptyset$, то соответствующие $\omega^{(k)}_i(t)$ в момент $t + \psi(t)$ сохраняются неизменными, $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. Введем далее элемент $\theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t)$, который будем задавать следующим образом : $\theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t) = \emptyset$, если $\gamma_{\nu(t)i} = 0$ и $\theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t) = (t + \psi(t) + \tau^{(1)}_i, \gamma_{\nu(t)i})$, если $\gamma_{\nu(t)i} > 0, 1 \le i \le m$, ($\nu(t)$ фиксировано). При $\gamma_{\nu(t)i} > 0$ элемент $\theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t)$ соответствует родившимся в момент $t + \psi(t)$ частицам вида A_i нулевого возраста, $1 \le i \le m$. Предположим, что частицы вида A_i возраста $0 = \tau^{(0)}_i \le s_i < \tau^{(1)}_i$ не участвуют во взаимодействии частиц с номером $\nu(t), 1 \le i \le m$. Тогда можно записать, что точечные распределения (3) в момент $t + \psi(t)$ переходят в точечные распределения следующего вида :

$$\omega^{(0)}_i(t) \to \omega^{(0)}_i(t + \psi(t)) = \omega^{(0)}_i(t) + \theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t), \quad 1 \le i \le m. \tag{13}$$

Здесь символ "$+$" означает, что $\omega^{(0)}_i(t)$ дополняются ненулевыми $\theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t)$, которые размещаются вслед за их последними элементами, $1 \le i \le m$. Если же при некотором $1 \le k \le m$ $\theta^{(0)}_{\nu(t)k}(t) = \emptyset$, то $\omega^{(0)}_k(t)$ в момент $t + \psi(t)$ остаются неизменными. Объединяя далее соотношения (12) и (13), получим, что точечные распределения (3) изменяются следующим образом :

$$\omega^{(0)}_i(t) \to \omega^{(0)}_i(t + \psi(t)) = \omega^{(0)}_i(t) \nabla \sigma^{(0)}_{\nu(t)i}(t) + \theta^{(0)}_{\nu(t)i}(t),$$

$$\omega^{(k)}_i(t) \to \omega^{(k)}_i(t + \psi(t)) = \omega^{(k)}_i(t) \nabla \sigma^{(k)}_{\nu(t)i}(t), \quad 1 \le k \le l_i, \tag{14}$$

$$1 \le i \le m.$$

Операции над $\omega^{(0)}_i(t)$, обозначенные символами "∇" и "$+$", применяются последовательно слева направо, $1 \le i \le m$. Очевидно, что полученные точечные распределения $\omega^{(k)}_i(t + \psi(t))$ являются упорядоченными по первым компонентам своих элементов, $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$.

Если окажется, что $Q(x(t)) = 0$, то будем полагать, что $t + \psi(t) = T + \max(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m)$, т. е. за оставшийся промежуток моделирования $[t, T]$ все точечные распределения (3) не будут изменяться вследствие взаимодействия частиц.

Точечные распределения (3) могут изменяться не только за счет взаимодействия частиц, но и за счет изменения возраста частиц. При этом, частицы вида A_i, завершающие свое существование в некоторый момент $t + \tau_i$, независимо от других частиц и предшествующих событий могут порождать совокупности частиц $W^{(0)}_{\rho_i}, 1 \le i \le m$. Введем случайную величину $\xi(t)$ как продолжительность времени до первого перехода некоторой совокупности частиц из одного возрастного класса в другой, начиная с момента t. Предположим, что на промежутке $[t, t + \xi(t)]$ не происходит событий, связанных с взаимодействием частиц, только лишь возраст всех существующих частиц увеличивается на величину $\xi(t)$. Для фиксированного $1 \le i \le m$ определим множество индексов $G_i(t) = \{k : \omega^{(k)}_i(t) \ne \emptyset, 0 \le k \le l_i\}$. Примем, что хотя бы одно $G_i(t)$ не пусто,

$1 \le i \le m$. Тогда можно записать, что

$$t + \xi(t) = \min\{(t_{i1} + \tau_i^{(k+1)}), k \in G_i(t) \ne \emptyset, 1 \le i \le m\}, \qquad (15)$$

где величины $t_{i1} + \tau_i^{(k+1)}$ задают ближайшие к t моменты перехода частиц определенного возраста в следующие возрастные классы, $k \in G_i(t) \ne \emptyset, 1 \le i \le m$. Некоторые из этих моментов времени могут быть одинаковы, что обусловлено возможностью одновременного рождения частиц различных видов и, кроме того, возможностью совпадения границ отдельных возрастных диапазонов.

Пусть $E_i(t) = \{k : t_{i1} + \tau_i^{(k+1)} = t + \xi(t), k \in G_i(t) \ne \emptyset\}, 1 \le i \le m$. По построению хотя бы одно $E_i(t)$ не пусто, $1 \le i \le m$. Если для фиксированного $1 \le i \le m \quad E_i(t) \ne \emptyset$, то элемент $\chi_i^{(k)}(t) = (t_{i1} + \tau_i^{(k+1)}, n_{i1}^{(k)}(t))$ исключается из $\omega_i^{(k)}(t), k \in E_i(t)$, а $\omega_i^{(k+1)}(t)$ дополняется элементом $\eta_i^{(k+1)}(t) = (t_{ij_{(k+2)}} + \tau_i^{(k+2)}, n_{ij_{(k+2)}}^{(k+1)}(t))$, который размещается вслед за последним элементом этого точечного распределения, $t_{ij_{(k+2)}} = t_{i1}, n_{ij_{(k+2)}}^{(k+1)}(t) = n_{i1}^{(k)}(t), k \in E_i(t), k \ne l_i$. В остальных случаях положим, что $\chi_i^{(k)}(t) = \emptyset, \eta_i^{(k+1)}(t) = \emptyset, 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. Вариант $k = l_i \in E_i(t) \ne \emptyset$ означает, что $n_{i1}^{(l_i)}(t)$ частиц вида A_i достигли предельного возраста и погибают, $1 \le i \le m$. Каждая из таких частиц порождает совокупность $W_{\rho_i}^{(0)}$ частиц нулевого возраста, $1 \le i \le m$. Всего же рождается $\varepsilon_j(t) = \sum_{i \in H(t)} n_{i1}^{(l_i)}(t)\rho_{ij}$ частиц вида A_j нулевого возраста, $1 \le j \le m$, где $H(t) = \{i : l_i \in E_i(t) \ne \emptyset, 1 \le i \le m\}$. Определим элемент $\pi_j^{(0)}(t)$ по формуле : $\pi_j^{(0)}(t) = (t + \xi(t) + \tau_j^{(1)}, \varepsilon_j(t))$, если $\varepsilon_j(t) > 0$ и $\pi_j^{(0)}(t) = \emptyset$, если $\varepsilon_j(t) = 0$ или при всех $1 \le i \le m \quad l_i \notin E_i(t) \ne \emptyset, 1 \le j \le m$.

Используя введенные выше обозначения, можно записать, что точечные распределения (3) в момент времени $t + \xi(t)$ изменяются следующим образом :

$$\begin{gathered} \omega_i^{(0)}(t) \to \omega_i^{(0)}(t + \xi(t)) = \omega_i^{(0)}(t) - \chi_i^{(0)}(t) + \pi_i^{(0)}(t), \\ \omega_i^{(k)}(t) \to \omega_i^{(k)}(t + \xi(t)) = \omega_i^{(k)}(t) - \chi_i^{(k)}(t) + \eta_i^{(k)}(t), \quad 1 \le k \le l_i, \\ 1 \le i \le m. \end{gathered} \qquad (16)$$

Символы " $-$ " и " $+$ " в (16) означают, соответственно, что из $\omega_i^{(k)}(t)$ исключаются ненулевые элементы $\chi_i^{(k)}(t)$, а потом $\omega_i^{(k)}(t)$ дополняются ненулевыми элементами $\pi_i^{(0)}(t), \eta_i^{(k)}(t)$, которые размещаются вслед за последними элементами этих точечных распределений, $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. Если же при некоторых $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$, указанные выше элементы являются нулевыми, то соответствующие $\omega_i^{(k)}(t)$ в момент $t + \xi(t)$ остаются неизменными. Нетрудно заметить, что описанные выше точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t + \xi(t)), 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$, являются упорядоченными по первым компонентам своих элементов.

Пусть для всех $1 \le i \le m \quad G_i(t) = \emptyset$. Это означает, что в момент времени t отсутствуют частицы всех видов, т. е. $x_i(t) = 0$, а точечные распределения (3) являются нулевыми, $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$. В этом случае будем говорить, что рассматриваемые популяции выродились к моменту времени t. Отсюда следует, что на промежутке времени $[t,T]$ все точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t)$ остаются неизменными и равными $\omega_i^{(k)}(t)=\emptyset, 0\le k\le l_i, 1\le i\le m$. Примем здесь, что $t+\xi(t)=T+\max(\tau_1,\tau_2,...,\tau_m)$.

Рассмотренные выше события, связанные с гибелью и рождением частиц, приводят к изменениям точечных распределений (3) в момент времени $t+\varphi(t)$, где $\varphi(t)=\psi(t)$, если $\psi(t)<\xi(t)$ и $\varphi(t)=\xi(t)$, если $\psi(t)\ge\xi(t)$. На промежутке времени $[t,t+\varphi(t))$ $\omega_i^{(k)}(t)$ сохраняются неизменными, а в момент $t+\varphi(t)$ они переходят в $\omega_i^{(k)}(t+\varphi(t))$, которые задаются формулами (14), если $\psi(t)<\xi(t)$ и (16), если $\psi(t)\ge\xi(t), 0\le k\le l_i, 1\le i\le m$. Для завершения построения модели примем, что в начальный момент времени t_0 заданы точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t_0), 0\le k\le l_i, 1\le i\le m$, характеризующие возрастной состав первоначально существующих частиц всех видов. Изменение точечных распределений (3) на промежутке $[t_0,T]$ может быть описано с помощью последовательности $\{t_j,\omega_i^{(k)}(t_j), 0\le k\le l_i, 1\le i\le m\}, j=0,1,2,...,N$, которая задается рекуррентными соотношениями. Здесь $t_1,t_2,...,t_N$ – моменты изменения точечных распределений (3). Эти моменты определяются следующим образом :

$$t_j=t_{j-1}+\varphi(t_{j-1}),\quad j=1,2,...,N, \tag{17}$$

где $\varphi(t_{j-1})=\psi(t_{j-1})$, если $\psi(t_{j-1})<\xi(t_{j-1})$ и $\varphi(t_{j-1})=\xi(t_{j-1})$, если $\psi(t_{j-1})\ge\xi(t_{j-1})$, а N такой номер, что $t_N\le T, t_{N+1}>T$. Величины $\psi(t_0),\psi(t_1),...,\psi(t_N),\xi(t_0),\xi(t_1),...,\xi(t_N)$ приняты условно независимыми, а законы их распределения описываются формулами (8), (15) при заданных $\omega_i^{(k)}(t_0),\omega_i^{(k)}(t_1),...,\omega_i^{(k)}(t_{N-1})$, с учетом соотношений $Q(x(t_j))=0, G_i(t_j)=\emptyset$ при некоторых $j=0,1,2,...,N$, $0\le k\le l_i, 1\le i\le m$. Точечные распределения (3) находятся по формулам (14) и (16), применение которых приводит к следующим соотношениям. Пусть $\psi(t_{j-1})<\xi(t_{j-1})$. Тогда

$$\omega_i^{(k)}(t_j)=\omega_i^{(k)}(t_{j-1})\nabla\sigma^{(k)}_{\nu(t_{j-1})i}(t_{j-1}),\quad 1\le k\le l_i,$$

$$\omega_i^{(0)}(t_j)=\omega_i^{(0)}(t_{j-1})\nabla\sigma^{(0)}_{\nu(t_{j-1})i}(t_{j-1})+\theta^{(0)}_{\nu(t_{j-1})i}(t_{j-1}),\quad 1\le i\le m. \tag{18}$$

Если же $\psi(t_{j-1})\ge\xi(t_{j-1})$, то

$$\omega_i^{(k)}(t_j)=\omega_i^{(k)}(t_{j-1})-\chi_i^{(k)}(t_{j-1})+\eta_i^{(k)}(t_{j-1}),\quad 1\le k\le l_i,$$

$$\omega_i^{(0)}(t_j)=\omega_i^{(0)}(t_{j-1})-\chi_i^{(0)}(t_{j-1})+\pi_i^{(0)}(t_{j-1}),\quad 1\le i\le m. \tag{19}$$

Элементы

$$\sigma^{(k)}_{\nu(t_{j-1})i}(t_{j-1}),\quad \theta^{(0)}_{\nu(t_{j-1})i}(t_{j-1}),\quad \chi_i^{(k)}(t_{j-1}),\quad \pi_i^{(0)}(t_{j-1}),\quad \eta_i^{(k)}(t_{j-1}), \tag{20}$$

используемые в (18), (19), строятся по указанным выше для них формулам при каждом фиксированном $t_0,t_1,...,t_{N-1}$. Все случайные величины, входящие в формулы для элементов (20), являются условно независимыми при заданных $\omega_i^{(k)}(t_0),\omega_i^{(k)}(t_1),...,\omega_i^{(k)}(t_{N-1}), 0\le k\le l_i, 1\le i\le m$. В формулах (18) – (20) индекс j пробегает значения $1,2,...,N$.

Соотношения (18), (19) формально позволяют записать формулу для переходной вероятностной функции

$$P^{(1)}(\omega, B) = P\{\omega(t_j) \in B/\omega(t_{j-1}) = \omega\}, \tag{21}$$

где $\omega(t) = (\omega_i^{(k)}(t), 0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m)$, B – множество допустимых состояний рассматриваемых популяций частиц. На основе (21) можно указать также соотношения для переходной вероятностной функции из состояния $\omega(t_0)$ в некоторое состояние $\omega(t_k), k = 1, 2, ..., N$, (см. гл. 3 работы [8]). Однако практическое применение этих соотношений для нахождения вероятностных характеристик количества частиц различных видов является затруднительным. Поэтому для исследования динамики рассматриваемых популяций можно использовать метод статистического моделирования (метод Монте – Карло). В следующем разделе описан алгоритм, который позволяет реализовать описанную модель на ЭВМ.

3. Алгоритм моделирования

Зафиксируем моменты времени $Z = \{z_0, z_1, ..., z_T\}$, в которые нас интересуют состояния $\omega(t)$ моделируемых популяций, $z_0 = t_0 < z_T = T$. Зададим начальное состояние $\omega(z_0)$ популяций и все параметры, входящие в описание модели (1), (2). Схема алгоритма имеет следующий вид. Положим $t = z_0$. Далее выполняем последовательность действий.

1). Вычисляем по формулам (4), (5) величины $q_j(x(t)), 1 \le j \le n, Q(x(t))$. При $Q(x(t)) > 0$ генерируем случайное число $\psi(t) = -(\ln u_1)/Q(x(t))$, где u_1 – равномерно распределенная на $(0, 1)$ случайная величина. Если $Q(x(t)) = 0$, то полагаем, что $\psi(t) = 2T + \max(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m)$. Далее по формуле (15) находим величину $t + \xi(t)$, если только хотя бы одно из множеств $G_i(t)$ не пусто, $1 \le i \le m$. В противном случае принимаем, что $t + \xi(t) = T + \max(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m)$.

2). Полагаем $t + \varphi(t) = t + \psi(t)$, если $t + \psi(t) < t + \xi(t)$ и $t + \varphi(t) = t + \xi(t)$ в противном случае. Пусть для некоторых элементов $z_{j1}, z_{j2}, ..., z_{jk}$ множества Z справедливы неравенства $t \le z_{j1} < z_{j2} < ... < z_{jk} < t + \varphi(t)$. Положим тогда $\omega(z_{j1}) = \omega(z_{j2}) = ... = \omega(z_{jk}) = \omega(t)$. Если $z_{jk} = z_T$, то заканчиваем вычисления, иначе переходим к следующему шагу.

3). Если $t + \psi(t) < t + \xi(t)$, то выбираем номер типа взаимодействия частиц $\nu(t)$ из условия

$$\sum_{j=1}^{\nu(t)-1} q_j(x(t)) < u_2 Q(x(t)) \le \sum_{j=1}^{\nu(t)} q_j(x(t)), \quad 1 \le \nu(t) \le n,$$

где u_2 – случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$ и не зависящая от u_1. Для фиксированных $j = \nu(t), 1 \le i \le m$, формируем элементы $\sigma_{ji}^{(k)}(t)$ по описанным в п. 2 правилам. В случае $\alpha_{ji} = 1, \beta_{ji} = 0$ находим номер $k = k_{ji}$ возрастного диапазона частицы вида A_i, участвующей в j – м взаимодействии.

Для этого фиксируем набор $F_{ji} = \{k : e_{ji} \le k \le d_{ji}\}, e_{ji}, d_{ji}$ – заданы. Далее выбираем номер k из условия

$$\sum_{v=e_{ji}}^{k-1} x_i^{(v)}(t) < u_3 x_i(t, a_{ji}, b_{ji}) \le \sum_{v=e_{ji}}^{k} x_i^{(v)}(t), \quad e_{ji} \le k \le d_{ji},$$

где u_3 – случайная величина, равномерно распределенная на $(0,1)$ и не зависящая от u_1, u_2. Для полученного k устанавливаем элемент $\Delta_{ji}^{(k)}(t)$, соответствующий рассматриваемой частице. Номер этого элемента $g = g_{ji}$ находим из соотношений

$$\sum_{v=1}^{g-1} n_{iv}^{(k)}(t) < u_4 x_i^{(k)}(t) \le \sum_{v=1}^{g} n_{iv}^{(k)}(t), \quad 1 \le g \le j_k,$$

где u_4 – случайная величина, равномерно распределенная на $(0,1)$ и не зависящая от u_1, u_2, u_3. Далее формируем элементы $\theta_{ji}^{(0)}(t), 1 \le i \le m$, по описанным в п. 2 формулам. После этого строим точечные распределения $\omega_i^{(k)}(t + \psi(t))$, используя формулы (14), $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$.

4). Если $t + \psi(t) \ge t + \xi(t)$, то формируем элементы $\chi_i^{(0)}(t), \pi_i^{(0)}(t), \chi_i^{(k)}(t), \eta_i^{(k)}(t)$, $1 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$, по описанным в п. 2 формулам. Затем строим точечные распределения $\omega_i^{\overline{(k)}}(t + \xi(t))$, используя формулы (16), $0 \le k \le l_i, 1 \le i \le m$.

5). Полагаем $t = t + \varphi(t)$ и возвращаемся к шагу 1).

Приведенная схема вычислений позволяет построить одну реализацию моделируемого процесса в заданные моменты времени Z. Многократное применение этой схемы дает возможность оценить вероятностные характеристики количества частиц различных видов с помощью известных статистических методов.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно реализации на ЭВМ приведенного выше алгоритма.

A). Для поддержания точечных распределений (3) можно применять двунаправленные списки, при этом необходимо осуществлять контроль за использованием динамически распределяемой памяти. В каждом из списков рекомендуется выделить элемент, разбивающий список на две части, отвечающие примерно равному количеству частиц. Это приводит к сокращению времени поиска описанного на шаге 3) элемента $\Delta_{ji}^{(k)}(t)$.

B). При значительном количестве частиц может оказаться, что время $\varphi(t)$ настолько мало, что величины t и $t + \varphi(t)$ будут неразличимы при выполнении операции сложения на ЭВМ. Эта ситуация также должна контролироваться в ходе вычислений.

C). Некоторые схемы взаимодействия частиц (2) могут включать в себя достаточно большое количество типов взаимодействия n. В этом случае для поиска номера $\nu(t)$ требуется специальная организация вычисления сумм $\sum_{j=1}^{\nu(t)} q_j(x(t))$ и проверка указанных на шаге 3) неравенств относительно $u_2 Q(x(t))$.

4. Заключение

Описанная выше модель использовалась для проведения расчетов по оценке вероятностных характеристик некоторых процессов и систем. В частности, рассматривались вероятностные модели процессов иммунного ответа при заболеваниях. В одной из моделей исследовался рост популяции лимфоцитов в условиях антигенной стимуляции. Модель включала частицы $m = 46$ видов, которые участвовали в $n = 50$ типов взаимодействия. Общее количество частиц составляло порядка $10^4 - 10^5$ частиц. Аналогичная модель была использована для описания процессов пролиферации и дифференцировки стволовых кроветворных клеток в селезенке облученных мышей. Кроме того, одна из модификаций модели применялась для прогнозирования потребностей регионов в педагогических кадрах. Результаты исследований с помощью указанных моделей представлены в работах [12] – [17].

Литература

1. Бартлет М.С. *Введение в теорию случайных процессов.* – М.: Иностранная литература, 1958.

2. Баруча – Рид А.Т. *Элементы теории марковских процессов и их приложения.* – М.: Наука, 1969.

3. Дорогов В.И., Чистяков В.П. *Вероятностные модели превращения частиц.* – М.: Наука, 1988.

4. Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах.* – М.: Мир, 1979.

5. Свирежев Ю.М. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.* – М.: Наука, 1987.

6. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* – М.: Наука, 1971.

7. Севастьянов Б.А., Калинкин А.В. *Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц* // Докл. АН СССР. 1982. Т.264. N 2. С.306-308.

8. Харрис Е. *Теория ветвящихся случайных процессов.* – М.: Мир, 1966.

9. Jagers P. *Branching processes with biological applications.* – London, Wiley and Sons, 1975.

10. Nisbet R., Gurney W. *Modelling Fluctuating Populations.* – New York, Wiley and Sons, 1982.

11. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Курс статистического моделирования.* – М.: Наука, 1976.

12. Перцев Н.В. *Вероятностная модель инфекционного заболевания.* – Препринт N 107. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.

13. Перцев Н.В. *Статистическое моделирование процессов иммунного ответа* // Материалы 7 Всесоюзного совещания «Методы Монте – Карло в вычислительной математике и математической физике». – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.

14. Марчук Г.И. *Математические модели в иммунологии. 2-е изд.* – М.: Наука, 1985.

15. Перцев Н.В. *Некоторые результаты математического моделирования процессов размножения и дифференцировки стволовых кроветворных клеток в селезенке облученных мышей* // Математические модели в иммунологии и медицине. – М.: Мир, 1986. С.199-211.

16. Перцев Н.В., Жуков С.И. *Социально – экономические исследования в народном образовании Северо – Казахстанской области: Отчет по НИР.* Петропавловский педагогический институт, 1993.

17. Перцев Н.В. *Математическое моделирование потребностей регионов в педагогических кадрах* // Вестник Омского университета. 1997. N 3. C.21-23.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.72-85.

УДК 517.958

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

Н.В. Перцев

The paper is concerned with a class of the integral and integrodifferential equations, arising in the mathematical models of the interacting individuals with a limited life span. The models of haemopoieses, cyclic infection disease and logistic growth of the populations are discussed.

1. Введение

Для исследования различных процессов в биологии, экологии, эпидемиологии, демографии и в других областях широко используется метод математического моделирования. В некоторых задачах изучается изменение во времени численности тех или иных объектов, характеризующих состояния исследуемых процессов. Такие объекты в дальнейшем будем обозначать термином «частицы». При построении моделей, описывающих динамику популяций частиц, применяются дифференциальные уравнения в форме обыкновенных уравнений, уравнений запаздывающего типа, уравнений в частных производных, а также интегральные и разностные уравнения (см., например, [1] – [17]). Во многих случаях модели задаются в виде дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t), \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

где $x(t)$ означает численность популяции частиц в момент времени t, функции $f(x_t)$ и $\lambda(x_t)x(t)$ описывают скорости рождения, иммиграции, гибели и эмиграции частиц. Эти функции могут зависеть как от текущего состояния $x(t)$, так и от предшествующих состояний $x(s), s \leq t$. Уравнения (1.1) дополняются соответствующим условием, задающим начальную численность частиц при $t \leq t_0$. Для некоторых популяций, описываемых уравнениями вида (1.1), приходится

E-mail: perts@omsk.edu

учитывать ограниченность времени жизни частиц. Необходимость в этом возникает в тех случаях, когда интервал времени моделирования превышает максимально допустимый (предельный) возраст частиц, либо в начальный момент времени имеются частицы, возраст которых близок к предельному. В этих случаях уравнения (1.1) должны быть модифицированы таким образом, чтобы они содержали члены, учитывающие распределение частиц по возрасту. Именно такой модификации и посвящена настоящая работа.

В разделе 2 сформулированы основные предположения и построены уравнения модифицированной модели. При выводе уравнений модели используются результаты работ [1, 2]. В разделе 3 рассматриваются примеры построения уравнений, описывающих процесс кроветворения, распространение инфекционного заболевания в замкнутой популяции, а также приводится интегральный аналог логистической модели динамики популяций.

2. Основные предположения и уравнения модели

При построении модели будем исходить из того, что изменение численности частиц $x(t)$ за бесконечно малый интервал времени $(t, t+dt)$ определяется балансовыми соотношениями между процессами рождения и гибели, иммиграции и эмиграции частиц, интенсивности которых зависят от величины $x_t = (x(t), x(t-\omega_1), ..., x(t-\omega_n))$, т. е. от численности частиц в текущий и предшествующие моменты времени, где $0 \leq \omega_k \leq \Omega$, $1 \leq k \leq n$, $0 < \Omega < \infty$. Обозначим через $0 < \tau < \infty$ максимальную продолжительность времени жизни частиц. Принимаем, что частицы возраста $s, 0 \leq s < \tau$, могут производить новые частицы нулевого возраста, а частицы, дожившие до возраста τ, погибают, не оставляя потомства. Помимо естественной гибели (при достижении возраста τ) будем рассматривать потерю частиц независимо от их возраста с темпом (скоростью) $\lambda \geq 0$. Считаем, что за интервал времени $(t, t+dt)$ теряется $\lambda(x_t)x(t)dt$ частиц. Потеря частиц с темпом λ, а также при достижении ими возраста τ, может быть связана с эмиграцией или гибелью частиц, в том числе и с их превращением в частицы другого вида, не рассматриваемые в данной модели. При этих предположениях определенная доля частиц не достигает предельного возраста, а их время жизни может принимать любые значения из интервала $(0, \tau)$. Прирост количества частиц обеспечивается появлением новых частиц. Считаем, что частицы нулевого возраста производятся за счет существующих частиц, независимо от их возраста, а также могут поступать из некоторого внешнего источника (иммиграция). Примем, что количество частиц нулевого возраста, появившихся за интервал времени $(t, t+dt)$, равно $f(x_t)dt$, где $f \geq 0$ описывает темп (скорость) рождения и иммиграции новых частиц. Распределение численности частиц по возрасту в начальный момент времени $t = 0$ будем задавать функцией $\varphi(s) \geq 0$ так, что интеграл $\int\limits_0^\tau \varphi(s)ds$ равен общему количеству первоначально существующих частиц.

Пусть теперь $x(t)$ фиксировано. Используя сделанные предположения, запишем выражение для $x(t+dt)$, считая процессы иммиграции, рождения, гибели и потери частиц на интервале времени $(t, t+dt)$ аддитивными. При $t \geq \tau$ имеем соотношение

$$x(t+dt) = x(t) + f(x_t)dt - \lambda(x_t)x(t)dt - p_1 f(x_{t-\tau})dt.$$

Здесь величина $f(x_{t-\tau})dt$ означает количество частиц нулевого возраста, появившихся за интервал времени $(t-\tau, t-\tau+dt)$, а параметр p_1 означает долю этих частиц, доживших до возраста τ. Получим выражения для доли p_1. Частицы нулевого возраста, появившиеся на некотором интервале (t_0, t_0+dt) в количестве $y(t_0) = f(x_{t_0})dt$, могут теряться с интенсивностью λ. Поэтому их последующее количество $y(t)$ при изменении t от t_0 до $t_0+\tau$ описывается соотношением

$$y(t+dt) = y(t) - \lambda(x_t)y(t)dt, \tag{2.1}$$

иначе, $y(t) = y(t_0)\exp(-\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(x_s)ds)$. Полагая теперь $t_0 = t-\tau$, имеем, что

$$p_1 = \exp(-\int\limits_{t-\tau}^{t} \lambda(x_s)ds).$$

При $0 \leq t \leq \tau$ получаем соотношение

$$x(t+dt) = x(t) + f(x_t)dt - \lambda(x_t)x(t)dt - p_2\varphi(\tau-t)dt,$$

в котором последний член описывает потерю первоначально существующих частиц при достижении ими возраста τ. Этого возраста могут достигнуть частицы возраста s такого, что $t+s=\tau$ или $s=\tau-t$. Количество частиц возраста $\tau-t$ задается функцией φ и равно $\varphi(\tau-t)dt$. Из них только доля p_2 доживает до возраста τ. Обращаясь к предыдущим рассуждениям, будем рассматривать соотношение (2.1) при $t_0 = 0$ и $y(t_0) = \varphi(\tau-t)dt$. Тогда

$$p_2 = \exp(-\int\limits_{0}^{t} \lambda(x_s)ds).$$

Объединяя все построенные соотношения, получаем, что уравнения модели записываются в следующей форме:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds}\varphi(\tau-t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ \\ \dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - e^{-\int\limits_{t-\tau}^{t} \lambda(x_s)ds} f(x_{t-\tau}), \quad t \geq \tau.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) дополним начальным условием

$$x(t) = \psi(t), \quad -\Omega \leq t \leq 0, \tag{2.3}$$

в котором функция $\psi(t) \geq 0$ задает численность частиц на отрезке времени $[-\Omega, 0]$. Поскольку численность частиц при $t = 0$ равна $\int\limits_0^\tau \varphi(s)ds$, то будем требовать, чтобы функции φ и ψ были бы согласованы между собой, иначе, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$x(0) = \psi(0) = \int\limits_0^\tau \varphi(s)ds. \tag{2.4}$$

Обратимся еще к одному варианту модели (2.2), учитывающему возрастную структуру популяции частиц. Пусть, по – прежнему, τ означает максимальную продолжительность времени жизни частиц. Будем предполагать, что гибель частиц вследствие процесса старения возможна в любом возрасте $0 \leq s \leq \tau$, а не только при достижении ими предельного возраста $s = \tau$. Предполагаем также, что частицы гибнут, не оставляя потомства (здесь можно считать, что в конце своего времени жизни частицы либо действительно погибают, либо превращаются в частицы другого вида, не рассматриваемые в данной модели). Примем, что функция $R(s) \geq 0$ описывает распределение частиц по времени жизни, так, что при фиксированном s она задает долю частиц, доживших до этого возраста, $0 \leq s \leq \tau$, $R(0) = 1, R(\tau) = 0$. Будем считать, что $R(s) = \int\limits_s^\tau p(u)du$, где $p(u) \geq 0$ – некоторая функция. Выражение $R(s) - R(s + ds) = p(s)ds$ задает долю частиц соответствующего возраста, погибающих за интервал времени $(s, s + ds)$ вследствие процесса старения.

Перейдем к уравнениям модели. Пусть $t \geq \tau$. Зафиксируем возраст частиц $0 \leq u \leq \tau$. Выражение $\exp(-\int\limits_{t-u}^{t} \lambda(x_s)ds) f(x_{t-u})dt$ означает количество частиц нулевого возраста, появившихся за интервал времени $(t - u, t - u + dt)$ и доживших до возраста u. Доля $p(u)du$ этих частиц погибнет. Перемножив последние выражения и просуммировав полученный результат по всем возрастам u от 0 до τ, получим, что количество частиц, погибающих за интервал времени $(t, t + dt)$ вследствие процесса старения, находится по формуле $\int\limits_0^\tau \exp(-\int\limits_{t-u}^{t} \lambda(x_s)ds) f(x_{t-u})p(u)dudt$. Следовательно, одно из уравнений модели принимает вид

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - \int\limits_0^\tau e^{-\int\limits_{t-u}^{t} \lambda(x_s)ds} f(x_{t-u})p(u)du.$$

Примем, что $0 \leq t \leq \tau$. Процесс старения будет влиять на потерю первоначально существующих частиц, численность которых задается через R и φ, а также на потерю появляющихся частиц нулевого возраста. Частицы возраста u через время t будут иметь возраст $u+t$. Так как предельный возраст частиц равен τ, то следует рассматривать только такие частицы, для которых $u+t \le \tau$. Потеря первоначально существующих частиц за интервал времени $(t, t+dt)$ будет задаваться выражением $\exp(-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds) \int\limits_0^{\tau-t} \varphi(u)p(u+t)dudt$. Если рассматривать частицы нулевого возраста, появляющиеся за период времени $0 \le t \le \tau$, то их гибель вследствие процесса старения описывается теми же формулами, что и в случае $t \ge \tau$. Единственное исключение состоит в том, что возраст частиц изменяется не от 0 до τ, а от 0 до t. Поэтому расход этих частиц за интервал времени $(t, t+dt)$ равен $\int\limits_0^t \exp(-\int\limits_{t-u}^t \lambda(x_s)ds) f(x_{t-u})p(u)dudt$. Отсюда получаем, что недостающее уравнение модели таково:

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - \int\limits_0^t e^{-\int\limits_{t-u}^t \lambda(x_s)ds} f(x_{t-u})p(u)du - e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds} \int\limits_0^{\tau-t} \varphi(u)p(u+t)du.$$

Начальное условие для уравнений модели будем задавать формулой (2.3), однако условие согласованности (2.4) следует рассматривать в несколько ином виде. Обозначим через $G(u) = \int\limits_u^\tau \varphi(s)ds$ численность первоначально существующих частиц, имеющих возраст от u до τ. Общая численность первоначально существующих частиц равна $G(0)$. Учитывая процесс старения, исключим из нее долю тех частиц, которые погибнут сразу же при $t = 0$. Их численность, очевидно, равна $D = \int\limits_0^\tau p(s)G(s)ds$. Поэтому примем, что $x(0) = G(0) - D =$ $= \int\limits_0^\tau \varphi(s)ds - \int\limits_0^\tau \int\limits_s^\tau p(s)\varphi(u)duds = \int_0^\tau R(s)\varphi(s)ds$.

В итоге получаем, что модель, учитывающая распределение частиц по времени жизни, будет иметь следующий вид:

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - (\rho x)(t), \quad t \ge 0, \tag{2.5}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad -\Omega \le t \le 0, \quad \psi(0) = x(0) = \int\limits_0^\tau R(s)\varphi(s)ds, \tag{2.6}$$

где оператор $(\rho x)(t), t \ge 0$, задается соотношением

$$(\rho x)(t) = \int\limits_0^{min(t,\tau)} e^{-\int\limits_{t-u}^t \lambda(x_s)ds} f(x_{t-u})p(u)du + e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds} \int\limits_0^{max(0,\tau-t)} \varphi(u)p(u+t)du.$$

Во всех построенных моделях производные от функций $x = x(t)$ понимаются как правосторонние производные. Предполагается, что все входящие в уравнения функции являются непрерывными.

Уравнения моделей могут быть записаны в эквивалентной интегральной форме. Действительно, интегрируя формально (2.5) по методу вариации произвольной постоянной, приходим к интегральному уравнению

$$x(t) = (Gx)(t), \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

в котором оператор $(Gx)(t)$ имеет вид

$$(Gx)(t) = \int\limits_0^\tau R(a) e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda(x_s)ds} f(x_{t-a})da, \quad t \geq \tau,$$

$$(Gx)(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds} \int\limits_t^\tau R(a)\varphi(a-t)da + \int\limits_0^t R(a) e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda(x_s)ds} f(x_{t-a})da, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Уравнение (2.7) должно рассматриваться совместно с начальным условием (2.6). Очевидно, что к (2.7) приводится и уравнение (2.2), для которого можно принять, что $R(s) = 1$ при $0 \leq s \leq \tau$ и $R(s) = 0$ при $s > \tau$.

Одной из особенностей рассмотренных моделей является то, что интенсивности появления и гибели частиц зависят от численности популяций, но не зависят от возраста частиц (учитывается только их старение). Примеры таких моделей представлены в разделе 3. Вместе с тем, при построении определенного класса моделей требуется учитывать влияние как численности популяций, так и возраста частиц на интенсивности их появления и гибели. В этом случае обычно используют уравнения в частных производных или интегральные уравнения, основанные на работе [1]. Достаточно общий подход к построению таких уравнений описан в работах [8], [12], [13], [14], [15].

Для получения модели в интегральной и, как следствие, в дифференциальной форме, можно использовать следующее функциональное соотношение, которое вытекает из приведенных выше балансовых уравнений. Примем, что $x(t) = \int_0^\tau x(a,t)da$, где $x(a,t)$ – плотность численности популяции частиц возраста a в момент времени $t, 0 \leq a \leq \tau, t \geq 0$. Обозначим через $b(t)$ интенсивность появления новых частиц нулевого возраста в момент времени $t \geq 0$. Функцию выживаемости частиц $R(a)$ будем считать невозрастающей на $[0,\tau]$, причем $R(0) = 1, R(a) = 0$ при $a > \tau$. Пусть $\chi\{U\}$ является индикатором события U. Тогда можно записать, что

$$x(a,t) = R(a)\varphi(a-t)\chi\{t \leq a \leq \tau\} + R(a)b(t-a)\chi\{0 \leq a \leq t\},$$
$$0 \leq a \leq \tau, \quad t \geq 0. \tag{2.8}$$

Учтем далее в (2.8) гибель частиц с интенсивностью $\lambda(x_t)$ независимо от их возраста. Тогда вместо (2.8) будем иметь следующее соотношение :

$$x(a,t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds} R(a)\varphi(a-t)\chi\{t \leq a \leq \tau\} + R(a) e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda(x_s)ds} b(t-a)\chi\{0 \leq a \leq t\},$$
$$0 \leq a \leq \tau, \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

Пусть в соотношении (2.9) интенсивность появления новых частиц нулевого возраста $b(t)$ такова, что $b(t) = f(x_t), t \geq 0$. Интегрируя (2.9) и учитывая, что $R(a) = 0$ при $a > \tau$, получим уравнение (2.7).

Предположим далее, что $b(t) = \int_0^\tau m(a)x(a,t)da$, где функция $m(a)$ задает специфическую возрастную рождаемость частиц в зависимости от их возраста $0 \leq a \leq \tau$. Положим $\lambda(x_t) \equiv 0$. Интегрируя соотношение (2.8), приходим к хорошо известной системе уравнений для $b(t)$ и $x(t)$

$$b(t) = \int_t^\tau m(a)R(a)\varphi(a-t)da + \int_0^t m(a)R(a)b(t-a)da,$$

$$x(t) = \int_t^\tau R(a)\varphi(a-t)da + \int_0^t R(a)b(t-a)da, \quad t \geq 0,$$

которая подробно описана в цитированных выше работах. Заметим, что при $t \geq \tau$ первые слагаемые в этих уравнениях обращаются в нуль, а оставшиеся интегралы можно рассматривать в пределах от 0 до τ.

Свойства решений построенных моделей могут быть исследованы с помощью результатов работы [18]. Используя обычные предположения относительно функций f и λ, можно доказать существование, единственность и неотрицательность решений $x(t)$ при всех $t \in [0, \infty)$. Это указывает на корректность применения предложенных моделей в целях описания динамики численности популяций частиц. В завершение отметим, что все построенные модели легко обобщаются на многомерный случай.

3. Примеры

В настоящем разделе рассматриваются примеры, которые иллюстрируют изложенный выше подход к построению уравнений моделей.

Пример 1. Модель процесса кроветворения.

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = \gamma x_2(t-\omega_1) - \lambda_1 x_1(t) - (\rho x)_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = g(x_1(t-\omega_2)) - \lambda_2 x_2(t) - (\rho x)_2(t), \quad t \geq 0,$$

с начальным условием

$$x_i(t) = \psi_i(t), \quad -\omega_i \leq t \leq 0, \quad \psi_i(0) = \int_0^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a)da, \quad i = 1, 2.$$

Данная система представляет собой одну из модификаций модели процесса кроветворения, описанной в работах [19], [20]. В этой системе $x_1(t)$ означает численность (концентрацию) клеток крови, $x_2(t)$ – концентрацию гормона – поэтина в момент времени t, параметр γ задает интенсивность выработки клеток крови из клеток костного мозга, а функция g описывает интенсивность производства гормона – поэтина по принципу отрицательной обратной связи. Предполагается, что $g(u)$ является непрерывной, невозрастающей при $0 \le u < \infty$ функцией и удовлетворяет условию Липшица на этом промежутке. Параметры ω_1, ω_2 учитывают некоторые запаздывания в скорости производства клеток крови и гормона – поэтина. Коэффициенты λ_1, λ_2 означают интенсивности гибели рассматриваемых частиц (клеток крови и молекул гормона – поэтина) за счет взаимодействия с факторами, которые в модели явно не учитываются. Операторы $(\rho x)_1(t), (\rho x)_2(t)$ описывают скорости уменьшения количества частиц вследствие процессов старения и имеют следующий вид:

$$(\rho x)_i(t) = e^{-\lambda_i t} \int\limits_0^{\tau_i - t} \varphi_i(a) p_i(a+t) da + \int\limits_0^t e^{-\lambda_i a} f_i(x_{t-a}) p_i(a) da, \quad 0 \le t \le \tau_i,$$

$$(\rho x)_i(t) = \int\limits_0^{\tau_i} e^{-\lambda_i a} f_i(x_{t-a}) p_i(a) da, \quad t \ge \tau_i, \quad i = 1, 2,$$

где $f_1(x_t) = \gamma x_2(t - \omega_1), f_2(x_t) = g(x_1(t - \omega_2))$, параметры $0 < \tau_i < \infty, i = 1, 2$ означают максимальные продолжительности времени жизни частиц, функции $R_i(a) = \int\limits_a^{\tau_i} p_i(s) ds$ описывают долю частиц, доживших до возраста a, функции $R_i(a)\varphi_i(a)$ задают распределение по возрасту частиц в начальный момент времени $t = 0, \quad 0 \le a \le \tau_i, i = 1, 2$. Принято, что все параметры модели положительны, а описанные выше функции являются неотрицательными и непрерывными в своих областях определения.

Рассматриваемая система уравнений с заданным начальным условием имеет единственное неотрицательное, ограниченное решение $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, определенное при всех $0 \le t < \infty$. Асимптотическое поведение решений данной системы зависит, в основном, от величин запаздываний ω_1, ω_2 и от скорости изменения функции $g(u)$. При определенных условиях существует $\lim_{t \to +\infty} x(t)$, либо решение $x(t)$ имеет колебательный характер (см., например, [21]). Построенная система уравнений легко обобщается на случай, когда в модели учитываются дифференцированные клетки костного мозга, а также стволовые кроветворные клетки.

Пример 2. Модель распространения инфекционного заболевания.

Следуя [20], рассмотрим процесс распространения инфекционного заболевания в некоторой популяции, суммарная численность которой $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ является постоянной величиной. Здесь переменные $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ описывают, соответственно, численности восприимчивых (S), зараженных (E) и заболевших (I) индивидуумов популяции в момент времени t. Предполагается, что заболевшие I – индивидуумы не изолируются, заболевание не приводит к их гибели, а переболевшие индивидуумы иммунитет не приобретают. Интенсивность появления зараженных E – индивидуумов задается функцией $\gamma x_1 x_3$, где $\gamma > 0$ – среднее число эффективных контактов между S – и I – индивидуумами.

Продолжительность времени пребывания индивидуумов в E – и I – состояниях зададим функциями $R_i(a) = \int\limits_a^{\tau_i} p_i(u)du$, $0 \le a \le \tau_i$, $i = 2, 3$, где $0 < \tau_2, \tau_3 < \infty$ – максимально возможные времена пребывания индивидуумов в указанных состояниях. Динамику численности индивидуумов будем описывать с помощью системы интегродифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = (\rho x)_3(t) - \gamma x_1(t)x_3(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \gamma x_1(t)x_3(t) - (\rho x)_2(t), \quad t \ge 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = (\rho x)_2(t) - (\rho x)_3(t).$$

Данную систему дополним неотрицательными начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_i(0) = x_i^0 = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a)da, \quad i = 2, 3,$$

где функции $R_i(a)\varphi_i(a), 0 \le a \le \tau_i, i = 2, 3$ задают распределение первоначально существующих индивидуумов по времени пребывания в E – и I – состояниях. Операторы $(\rho x)_2(t), (\rho x)_3(t), t \ge 0$ имеют следующий вид :

$$(\rho x)_2(t) = \int\limits_0^{max(0,\tau_2 - t)} \varphi_2(a)p_2(a+t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau_2)} \gamma x_1(t-a)x_3(t-a)p_2(a)da,$$

$$(\rho x)_3(t) = \int\limits_0^{max(0,\tau_3 - t)} \varphi_3(a)p_3(a+t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau_3)} (\rho x)_2(t-a)p_3(a)da.$$

Функции $p_i(a), \varphi_i(a), i = 2, 3$, входящие в эти соотношения, предполагаются неотрицательными и непрерывными в своих областях определения. Представленная система интегродифференциальных уравнений может быть сведена к системе интегральных уравнений, которая подробно исследована в работе [20]. В частности, показано, что при выполнении неравенства $\gamma T \le 1$ любое решение системы таково, что $x_1(t) \to x_1^*$, $x_2(t) \to 0$, $x_3(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $T = \int\limits_0^{\tau_3} R_3(a)da$ означает среднюю продолжительность заболевания, а величина $x_1^* = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0$. Последнее означает, что эпидемия в рассматриваемой популяции не будет развиваться, если среднее число эффективных контактов (γ) либо средняя продолжительность заболевания (T) являются достаточно малыми.

Пример 3. Интегральная логистическая модель.

Рассмотрим популяцию особей, в которой интенсивность рождения новых особей равна $b(t) = \int_0^{\tau} m(a)x(a,t)da$. Интенсивность гибели особей вследствие конкуренции и самолимитирования задается как $\lambda(x_t) = \lambda x(t)$, где $\lambda > 0$ – некоторый параметр, $x(t)$ – общее количество особей популяции в момент времени t. Процесс старения особей и распределение первоначально существующих особей по возрасту будем задавать функциями $R(a) = \int\limits_a^\tau p(s)ds$ и $\varphi(a), 0 \le a \le \tau$, где τ – максимально допустимый возраст особей популяции. Функции $m(s), p(s), \varphi(s)$ приняты неотрицательными и непрерывными для всех $0 \le s \le \tau$, $m(s), p(s)$ тождественно не равны нулю на $[0, \tau]$. Интегрируя соотношение (2.9), приходим к системе уравнений для $b(t)$ и $x(t)$

$$b(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda x(s)ds} \int\limits_{min(t,\tau)}^{\tau} m(a)R(a)\varphi(a-t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau)} m(a)R(a)e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda x(s)ds} b(t-a)da,$$

$$x(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda x(s)ds} \int\limits_{min(t,\tau)}^{\tau} R(a)\varphi(a-t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau)} R(a)e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda x(s)ds} b(t-a)da, \quad t \ge 0.$$

Для исследования решений $b(t), x(t)$ данной системы перейдем к функциям

$$z(t) = b(t)\exp(\int\limits_0^t \lambda x(s)ds), \quad y(t) = x(t)\exp(\int\limits_0^t \lambda x(s)ds),$$

которые удовлетворяют следующим интегральным уравнениям :

$$z(t) = \int\limits_{min(t,\tau)}^{\tau} m(a)R(a)\varphi(a-t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau)} m(a)R(a)z(t-a)da, \tag{3.1}$$

$$y(t) = \int\limits_{min(t,\tau)}^{\tau} R(a)\varphi(a-t)da + \int\limits_0^{min(t,\tau)} R(a)z(t-a)da, \quad t \ge 0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) относится к интегральным уравнениям типа одномерных уравнений восстановления, свойства решений $z(t)$ которых хорошо известны (см., например, [21], [22]). Свойства функции $y(t)$ легко устанавливаются из (3.2). Очевидно, что (3.1) и (3.2) допускают нулевое решение $z(t) = y(t) = 0, t \ge 0$, если только $\varphi(a) \equiv 0, 0 \le a \le \tau$. В противном случае функции $z(t), y(t)$ являются положительными, $t \ge 0$. Поведение решения $z(t)$ тесно связано с параметром $B = \int\limits_0^\tau m(a)R(a)da$ и с единственным действительным корнем β уравнения

$$\int\limits_0^\tau m(a)R(a)e^{-\beta a}da = 1.$$

Параметр B обычно называют репродуктивным числом особи, а β – мальтусовским параметром. Предполагая, что $\varphi(a)$ не равна тождественно нулю на $[0, \tau]$, можно записать, что $z(t) = \exp(\beta t)h(t), t \geq 0$, где $h(t)$ удовлетворяет некоторому уравнению вида (3.1). Функция $h(t)$ является непрерывной, положительной, ограниченной сверху, $0 \leq t < \infty$, и $h(t) \to h^* > 0$ при $t \to +\infty$. Параметр β таков, что $\beta > 0, \beta = 0, \beta < 0$, если, соответственно, $B > 1, B = 1, B < 1$. Используя далее результаты работы [25], можно показать, что численность популяции $x(t)$ ведет себя следующим образом : если $B \leq 1$, то популяция вырождается, иначе, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, если же $B > 1$, то $x(t) \to x^*$ при $t \to +\infty$, где $x^* = \beta/\lambda$. В последнем случае численность популяции с ростом t стабилизируется на уровне x^*, причем $x(t)$ может стремиться к x^* как монотонным образом, так и с затухающими колебаниями. Распределение особей популяции по возрасту, соответствующее уровню x^*, имеет вид $x^*(a) = b^* R(a)\exp(-\beta a), 0 \leq a \leq \tau$, где $b^* = x^* / \int\limits_0^\tau R(s)\exp(-\beta s)ds$.

Установим теперь связь рассматриваемой интегральной модели с логистической моделью, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением. Примем, что $\beta > 0$. Пусть $\varphi(a) = K\exp(-\beta a), 0 \leq a \leq \tau$, $K > 0$ – некоторая константа. Из (3.1), (3.2) находим, что $z(t) = K\exp(\beta t)$, $y(t) = K\exp(\beta t)x^*/b^*$, $t \geq 0$. Дифференцируя соотношение $y(t) = x(t)\exp(\int\limits_0^t \lambda x(s)ds)$, приходим к хорошо известному уравнению для $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \beta x(t) - \lambda x^2(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x^0 = Kx^*/b^*,$$

В общем случае, когда $\varphi(a)$ не обязательно равна $K\exp(-\beta a)$, $0 \leq a \leq \tau$, дифференциальное уравнение для $x(t)$ принимает следующий вид :

$$\dot{x}(t) = \beta x(t) - \lambda x^2(t) - \varepsilon(t)x(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x^0 = \int\limits_0^\tau R(a)\varphi(a)da,$$

где функция $\varepsilon(t)$ строится через решения $z(t), y(t)$ уравнений (3.1), (3.2) и такова, что $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \varepsilon(s)ds$ является сходящимся. Полученное дифференциальное уравнение представляет собой аналог классической логистической модели.

Ниже приводятся результаты численных расчетов, иллюстрирующие поведение решений $x(t)$ интегральной модели. Зафиксируем $h > 0$ и предположим, что $x(0) > 0$. Используя указанную выше связь между $x(t)$ и $y(t)$, получим, что

$$\frac{x(t+h)}{x(t)} = \frac{y(t+h)}{y(t)}\exp(-\int\limits_t^{t+h} \lambda x(s)ds). \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1) и (3.2) можно решить аналитически либо проинтегрировать численно. Поэтому в (3.3) $y(t)$, $y(t+h)$ можно считать известными. Аппроксимируя интеграл $\int\limits_t^{t+h} \lambda x(s)ds$ с помощью одной из стандартных формул, получим рекуррентное соотношение для нахождения численного решения $x^n(t)$ рассматриваемой модели. При проведении конкретных расчетов интеграл в (3.3) заменялся на $(q\lambda x(t+h)+(1-q)\lambda x(t))h$, где $0 \leq q \leq 1$. Для контроля вычислений использовались разные значения коэффициента q и шага интегрирования h. На рис. 1 приведены характерные варианты поведения решений $x(t)$ рассматриваемой модели при $\beta > 0$. Принято, что $p(s) = const = 1/\tau, m(s) = \gamma = const$, $0 \leq s \leq \tau$. В этом случае имеем, что $z(t) = \gamma y(t), t \geq 0$, а уравнение (3.2) для функции $y(t)$ сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка запаздывающего типа. Это уравнение решается методом шагов. Параметры модели : $\varphi(s) = A\exp(Ls), 0 \leq s \leq \tau, \lambda = 0.05, \tau = 12$. Кривым 1), 2), 3) соответствуют $\gamma = 0.2$ и пары (A, L) вида $(2.2, -1.5), (2.8, -4.0), (0.05, 0.1)$. Для кривой 4) $\gamma = 0.5, A = 1.0, L = 0.5$. Кривая 5) – логистическая S – образная кривая, которая получается в модели при указанном выше выборе функции $\varphi(a), 0 \leq a \leq \tau$.

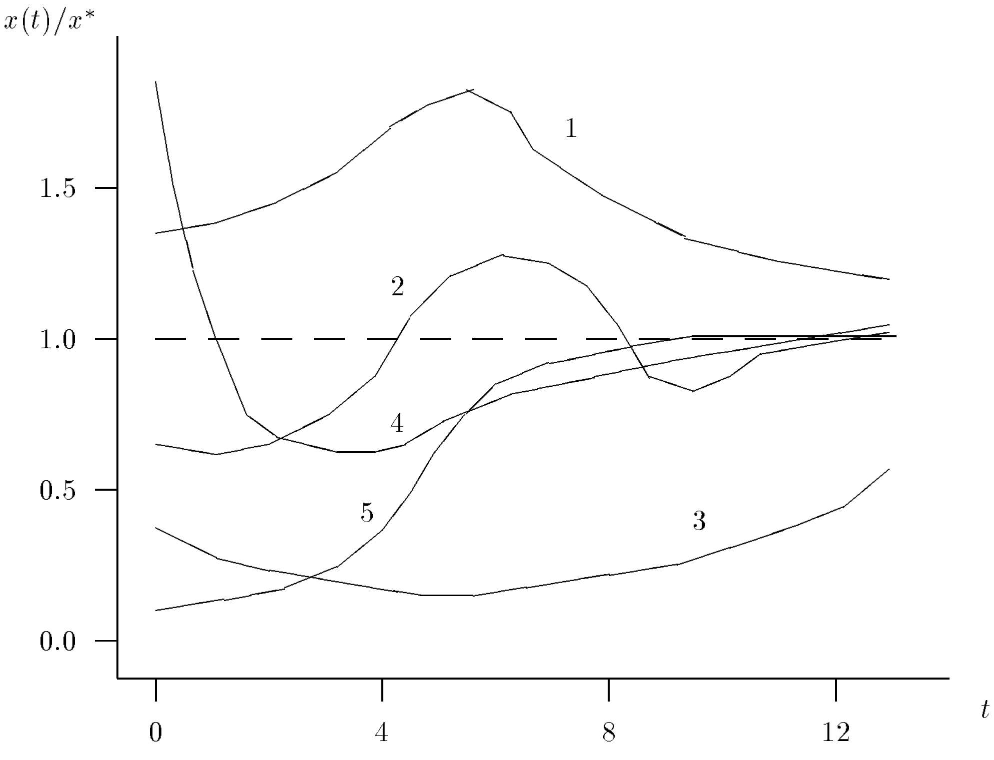

Рис. 1. Поведение решений интегральной логистической модели при $\beta > 0$ (обозначения в тексте)

Отметим, что рассмотренная модель легко распространяется на случай нескольких конкурирующих популяций. Иначе говоря, можно рассмотреть интегральный вариант модели Лотки – Вольтерра, уравнения которой будут задаваться соотношениями, аналогичными вышеприведенным. Исследование решений такой модели может быть проведено по описанной здесь схеме. Соответствующие интегральные уравнения сводятся к системе дифференциальных уравнений, которые совпадают с уравнениями классической модели Лотки – Вольтерра с точностью до членов вида $\varepsilon(t)x(t)$.

4. Заключение

В работе изложен один из возможных подходов к моделированию динамики популяций взаимодействующих частиц с учетом их возрастной и плотностной структуры. Представленные выше уравнения включают в себя возрастное распределение частиц на начальном отрезке времени $[0,\tau]$, отражают предысторию процесса и взаимодействие частиц друг с другом. Балансовые соотношения типа (2.8), (2.9) позволяют строить еще более сложные интегральные модели, учитывающие миграцию и взаимодействие частиц различного возраста.

В завершение отметим, что при малых численностях популяций необходимо использовать вероятностные модели. Эти модели позволяют исследовать динамику популяций в окрестности нулевых значений численностей, когда аппарат интегральных и дифференциальных уравнений, вообще говоря, не применим. Одна из вероятностных моделей, описывающих взаимодействие частиц с учетом их возрастной и плотностной структуры, приведена в работе [26].

Литература

1. Lotka A. *A contribution to the theory of self – renewing aggregates, with special reference to industrial replacement* // Ann. Math. Stat. 1939. V.10. P.1-25.

2. Cooke K., Yorke A. *Some equations Modelling Growth Processes and Gonorhea Epidemics* // Math. Biosci. 1973. V.16. P.75-101.

3. Busenberg S., Cooke K. (Eds). *Differential Equations and Applications in Ecology, Epidemics and Population Problems.* – New York, Academic Press, 1981.

4. Cushing J.M. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Lecture notes in biomathematics. Vol 20.* – New York, Springer, 1977.

5. Nisbet R.M., Gurney W. *Modelling Fluctuating Populations.* – New York, Wiley and Sons, 1982.

6. Базыкин А.Д. *Математическая биофизика взаимодействующих популяций.* – М.: Наука, 1983.

7. Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование.* – М.: Наука, 1976.

8. Карлин С. *Основы теории случайных процессов.* – М.: Мир, 1971.

9. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.* – М.: Мир, 1983.

10. Марчук Г.И. *Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты: 3-е изд.* – М.: Наука, 1991.

11. Михальский А.И., Петровский А.М., Яшин А.И. *Теория оценивания неоднородных популяций.* – М.: Наука, 1989.

12. Моисеев Н.Н. *Модели экологии и эволюции.* – М.: Знание, 1983.

13. Моран П. *Статистические процессы эволюционной теории.* – М.: Наука, 1973.

14. Нахушев А.В. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высшая школа, 1995.

15. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. *Динамические модели экологических систем.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1980.

16. Пых Ю.А. *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики.* – М.: Наука, 1983.

17. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. *Устойчивость биологических сообществ.* – М.: Наука, 1978.

18. Перцев Н.В. *Исследование решений одной системы интегродифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций* // Вестник Омского университета. 1996. N 1. С.24-26.

19. Марчук Г.И. *Математические модели в иммунологии: 1 - е изд.* – М.: Наука, 1980.

20. Marchuk G.I., Pertsev N.V. *Mathematical models of haemopoieses.* – In: Procs. of IFIP TC – 7 Work. Conf. on Math. Modelling in Immunology and Medicine. – North – Holland Publ. Comp. 1983. P.197-202.

21. Дьери И., Перцев Н.В. *Об устойчивости положений равновесия функционально – дифференциальных уравнений запаздывающего типа, обладающих свойством смешанной монотонности* // Докл. АН СССР. 1987. Т.297. N 1. С. 23-25.

22. Hethcote H.W., Stech H.W., P. van den Driessche. *Stability analisys for models of diseases without immunity* // J. Math. Biology. 1981. V.13. P.185-198.

23. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально – разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967.

24. Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы.* – М.: Наука, 1971.

25. Перцев Н.В. *Об одном обобщении логистической модели динамики популяций с ограниченным временем жизни особей* // Вестник Омского университета. 1997. N 1. С.14-16.

26. Перцев Н.В. *Вероятностная модель динамики популяций взаимодействующих частиц с ограниченным временем жизни.* – Наст. сборник.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.86-97.

УДК 519.6:681.14

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

С.Ю. Полякова

The problems of mathematical modeling of social processes are discussed. The different points of view on the mathematical models and modeling are given.

1. Особенности математического способа познания действительности

Существуют различные точки зрения на математический способ познания действительности. Многие считают, что математика разделяется на две ветви: чистая (теоретическая) и прикладная. Специфику чистой математики многие математики видят прежде всего в отвлеченности, абстрактности суждений. Затем – в используемом методе рассуждений, основу которого составляет набор аксиом и применение к этим аксиомам дедуктивного вывода, а также в логической определенности и строгости формулировок.

В.В. Фирсов предлагает формулировку положения, из которого вытекают все выше перечисленные особенности, и которое «действительно выделяет математику из ряда естественно-научных дисциплин, – возможность отказа от обязательной экспериментальной проверки математических утверждений. Именно подобный отказ приводит к необходимости уделять внимание логике точного математического рассуждения, которое становится единственным критерием его корректности» [3, с.223].

Отметим, что далее В.В. Фирсов подчеркивает, что данное положение более всего характерно для той ветви математики, которая отвечает за внутреннее развитие математических теорий.

Мнение о том, что при решении конкретных прикладных задач в математическом методе существенными становятся иные черты, широко распространено. Так, например, Г.И. Рузавин отмечает: «Методы чистой математики основываются на использовании только строго дедуктивных методов рассуждений... В прикладной математике приходится отказываться от таких жестких стандартов и обращаться к понятиям, менее огрубляющим действительность, и пользоваться правдоподобными рассуждениями» [4, с. 31]. Многими математиками отмечается, что принципиальной особенностью решения прикладных задач является широкое использование эвристических или правдоподобных рассуждений. К их числу относят (см, например, [1]):

– рассуждение по аналогии,

– применение понятий вне рамок их первоначального определения,

– применение актуальной бесконечности (то есть трактовка бесконечно малых и бесконечно больших величин как постоянных, но имеющих другой порядок, чем остальные величины),

– использование результатов приближенного решения при отсутствии точного решения.

Ввиду такого различия в методах, применяемых математиками для решения разных по природе задач, существует точка зрения, что математика разделяется на две ветви: чистую (теоретическую) математику и прикладную. Мы придерживаемся мнения, что лучше говорить не о разделении самой математики, а о том, что для одних ученых математика служит способом познания окружающей реальности, и в этом они видят мотив расширения математического знания. А для других математика сама представляет целый мир для изучения.

В связи с этим уместно привести по книге [2, с.35] определение того аспекта математики, который отвечает за применение математического аппарата при решении прикладных задач. Это определение выглядит так: «Прикладная математика – наука об оптимальном решении математических задач, возникающих вне математики». Данное определение позволяет говорить о ведущей роли метода математического моделирования в процессе познания различных сторон действительности.

2. Математическое моделирование

Под моделью понимается любой заместитель изучаемого объекта, который воспроизводит свойства и закономерности последнего. Моделирование (то есть построение моделей) лежит в основе любой науки.

Замена объектов познания их моделями является дополнительным орудием познания. Между человеком и познаваемым миром появляется искусственное звено в виде модели и метода (моделирования), помогающего получать знания. Свойства этого звена делают современное познание свободным относительно своих объектов. Это особенно важно при изучении тех из них, с которыми затруднен и даже невозможен непосредственный эксперимент (объекты космоса, критические ситуации на энергетических станциях, глобальные экологические процессы, явления микромира, критические воздействия на организм человека, эксперименты над обществом и т.д.). Благодаря этому моделирование стало чрезвычайно эффективным и, во многих случаях, незаменимым способом познания.

Моделирование может внести в познание необходимую наглядность. В настоящее время характеристики сложных объектов не всегда наглядны, и аппарат качественных методов в таких случая недостаточно помогает. Поэтому можно предположить, что, развив качественные способы моделирования до требуемого уровня, мы тем самым решим проблему наглядности количественного познания, количественного моделирования.

В научном понимании метод моделирования есть общий метод опосредованного познания, основанный на научной аналогии, который позволяет получать знания об объективно существующем объекте по моделям, находящимся с объектом в определенном сходстве, подобии. Эти модели создаются в специальных (модельных) информационных средах и дают возможность экспериментировать на них в целях получения новых знаний об изучаемом объекте.

Под информационной средой здесь подразумевается такая отдельная среда, которая может поставить человеку информацию о познаваемом объекте, выделяющуюся относительно других своими средствами, возможностями отображения объектов действительного мира.

В философии выделяют приемы познания, которые являются составляющими метода моделирования. Конспективно изложим их здесь.

1. Умозаключение по аналогии – такой прием познания (прием аналогий), когда из сходства некоторых признаков двух или более предметов, явлений действительности делается вывод о сходстве других признаков этих предметов, явлений. Чтобы быть полезной познанию, аналогия должна быть разумно неполной. В неполноте соответствия, только соответствия в основном, заключается познавательная ценность аналогии. Данная особенность позволяет делать без лишней траты ресурсов познания правдоподобные, обоснованные выводы о новых свойствах изучаемого объекта, пусть не похожего на прототип, но схожего по главным, определяющим свойствам.

2. Прием гипотез – способ выдвижения обоснованных теоретических предположений. При невозможности проверить правильность гипотезы в среде самого объекта ее предположения переводят в информационную среду аналогов объекта, при моделировании ее называют модельной. В случае удачи этого мероприятия как бы формулируется задача создания модели объекта познания.

3. Прием синтеза – процесс создания из разрозненных фактов сформулированной гипотезы единого целого, превращение этих фактов еще не в модель, а пока только в аналог, поскольку адекватность модели еще не доказана.

4. Созданный целостный аналог, чтобы быть полезным, подвергается возможным упрощениям путем выделения одного наиболее интересного для изучения и одновременно посредством пренебрежения мало существенного. Этот прием называется приемом абстрагирования. Именно он, отбирая самое существенное, основное, делает модель эффективной (простой и действенной).

5. Прием анализа – наблюдая за конкретным, мы абстрагируемся от несущественного и осознаем абстракции (абстрактное). Потом воплощаем эти абстракции в модели, проводим над ними эксперименты в целях обнаружения и описания более полного – конкретного содержания объекта познания в виде новых свойств у доступной для исследования модели. Полученные знания переносим на изучаемый объект (конкретное). Далее рассматриваем оригинал на новом теоретическом уровне, начиная с выделения новых свойств, поиска новых знаний путем абстрагирования и создания моделей, повторяя пройденные

этапы. Здесь знания о модели все более организуются во все более конкретное.

6. Подвергнутый анализу на принципиальную непротиворечивость, соответствие целям познания, аналог требует далее более уточненной проверки на свое соответствие статусу модели приемом эксперимента, который есть следующая составляющая моделирования, прямо дополняющая прием анализа. Эксперимент на модели производит основную проверку истинности гипотезы, где после всестороннего наблюдения проявлений модели либо принимается гипотеза, либо отклоняется, после чего выдвигается новая.

В зависимости от способа построения модели различают два типа моделей: материальные (материальные аналоги изучаемых явлений) и мысленные (мысленный образец изучаемого явления).

Мы будем далее рассматривать только мысленные модели, построенные средствами математики для исследования объектов, возникших вне математики.

Известно, что одним из наиболее плодотворных методов математического познания действительности является построение математических моделей изучаемых явлений.

По одному из определений, математическая модель – это «система математических зависимостей, описывающих структуру или функционирование объекта» [5, с.207].

Основные предъявляемые требования к математическим моделям [2]:

1) адекватность процессу;

2) разрешимость модели.

Эти два основных требования находятся в противоречии друг с другом: чем модель более адекватна изучаемому реальному объекту или явлению, тем она, вообще говоря, менее проста. Искусство математического моделирования и состоит в том, чтобы для каждой конкретной задачи определить баланс между этими двумя требованиями.

Общепринято делить процесс применения математики к любой практической задаче на три этапа:

1) этап перехода от ситуации, которую необходимо разрешить к формальной математической модели этой ситуации – этап формализации,

2) решение поставленной математической задачи методами, развитыми в самой математике для задач данного типа – этап решения задачи внутри построенной математической модели,

3) интерпретация полученного решения математической задачи, применение этого решения к исходной ситуации и сопоставление его с нею.

Математические модели можно классифицировать по их основным функциям [6]:

1. Модели-описания (связывают реальные объекты и явления с абстрактнологическими методами их изучения);

2. Модели-интерпретации (конкретны по отношению к моделируемому объекту, возникают при переходе от одной модели к другой на втором этапе моделирования);

3. Модели-аналогии (адекватны по уровню общности своим прототипам, используются на втором этапе).

3. Роль математики в исследованиях гуманитарных наук

В литературе хорошо освещены все типы математических моделей и этапы математического моделирования применительно к задачам, взятым из области техники, механики и физики. Это связано прежде всего с тем, что все понятия, величины, фигурирующие в таких задачах, достаточно хорошо поддаются измерениям, количественной оценке. По выражению А.Я. Хинчина (цитата по книге [7]) вопрос о том, «может ли быть тот или иной предмет, то или иное явление реального мира исследуемо с помощью данного математического метода.., решатся не конкретной материальной природой предмета или явления, но исключительно их формальными структурными свойствами и прежде всего – теми количественными соотношениями и пространственными формами, в которых они живут или протекают».

Академик А.Н. Крылов писал [4]: «Есть множество величин; то есть того, к чему приложены понятия «больше» и «меньше», но величин точно не измеримых, например, ум и глупость, красота и безобразие, храбрость и трусость, находчивость и тупость и так далее. Для измерения этих величин нет единиц, эти величины не могут быть выражены числами». Подобные величины носят название латентных.

Из этого может показаться, что сравнение латентных величин возможно лишь на некоторой интуитивной основе. На основе этого некоторыми (например [8]) делается вывод о том, что оценка таких величин числом (а значит, и какие-либо математические операции над ними) представляется очень искусственным приемом. А так как латентные величины чаще всего используются в общественных науках, то, исходя из подобных соображений, трудно будет найти место математическим методам в решении задач гуманитарных отраслей.

Однако, например, Г.И. Рузавин отмечает: «Там, где нельзя образовывать количественные понятия, чаще всего ограничиваются сравнительными понятиями, которые устанавливают отношения порядка между свойствами и другими характеристиками явлений в терминах «больше», «меньше», «равно». Всюду, где в ходе исследования обнаруживается определенная упорядоченность в интенсивности (неверен принцип аддитивности) или экстенсивности (верен принцип аддитивности) свойств вещей и явлений, могут быть применены методы их количественного сравнения и измерения» [4].

На трудности применения математики в гуманитарных областях указывает много математиков, работающих над такими проблемами. Так, например, академик И.М. Гельфанд [9] подчеркивает, что в целом математика, основные идеи которой развивались в тесной связи с науками, изучающими объекты неживой природы, оказалась неудобной для описания живых систем, будь то отдельная клетка, человеческий организм или общество. Выход из этой ситуации ученый видит в создании нового адекватного математического аппарата. Такое же мнение высказывает и Е.С. Венциль, предостерегая от «механического» переноса, существующих математических методов на материал, ранее изучавшийся только гуманитариями.

Причины сложностей с формализацией описания различных объектов гуманитарных наук В.М. Петров и Я.И. Яблонский [10] видят в «неделимости изучаемой системы на элементы, неоднородности структуры сложных систем, нелинейности характеристик, резко асимптотическом распределении параметров, многоконкурентных взаимосвязях».

А.А. Петров и П.С. Краснощеков [11], говоря о математических моделях управляемых систем с участием людей, указывают, что трудности, возникающие при этом, «отражают факт, что еще не открыты фундаментальные принципы целенаправленной сознательной деятельности», то есть «...главная проблема заключается в том, что еще не открыты принципы математического описания процессов с участием людей, принципы, подобные разработанным в физике». Поэтому многие задачи, которые решаются математиками в гуманитарных областях, по выражению И.М. Гельфанда [9] «навеяны обсуждением проблем этих наук»; математический аппарат, наиболее часто используемый, (а это в основном статистика, факторный анализ, иногда дифференциальные уравнения) является полезным средством, но носит лишь вспомогательный характер.

Известны три формы (иногда их называют этапами) математизации научного знания (по книге [12, с.316]). Первая состоит в «численном выражении изучаемой реальности для выявления количественной меры и границ соответствующих качеств». То есть к данным, полученным эмпирическим путем, применяется аппарат математической статистики, предлагается количественная формулировка качественно установленных фактов и обобщений.

Вторая форма является основной формой математизации научного познания. Она заключается в разработке математических моделей рассматриваемых явлений.

Третья форма – «использование математического аппарата для построения и анализа конкретных научных теорий (объединение частных построений в фундаментальную теоретическую схему, переход от модели к теории)» [13, 10].

В целом гуманитарные науки освоили только первую форму математизации знания. Лидером в этой области являются экономические исследования, в которых уже обычным явлением стало построение математических моделей.

Одна из хорошо известных моделей развития мировой экономики предложена была Д. Форрестером. В книге [11] содержится критический разбор этой математической модели, которую, кстати, сам Д. Форрестер считал предварительным и дискуссионным результатом. Форрестер учитывал, что в мировой системе протекают и взаимодействуют демографические процессы, процессы накопления капитала и производства, исчерпания природных ресурсов и загрязнения среды обитания. Состояние системы описывается численностью населения, количеством накопленного капитала, долей капитала в сельском хозяйстве, количеством имеющихся природных ресурсов, загрязнением среды обитания. Общая структура модели – система дифференциальных уравнений, описывающая динамику системы, качественный разбор которой приводится в [11].

П.С. Краснощеков и А.А. Петров указывают на несовершенство системы, разработанной Д. Форрестром, так как не выделены «аккуратно объекты изучения, не описаны адекватно характеризующие их параметры, не установлены правильные взаимодействия объектов». «В модели Форрестера совершенно отсутствует конкретный анализ конкретных экономических явлений. Все...зависимости основаны на неконкретных общих соображениях, которые основываются на наблюдениях за видимыми экономическими явлениями в мире. Даже не ставится вопрос об адекватном математическом описании процессов, протекающих в экономической системе» [11, с.181, 182]. Авторы предостерегают от некритического восприятия этой модели и предлагают свой вариант описания различных систем с участием людей. П.С. Краснощеков и А.А. Петров поставили перед собой задачу: разрабатывать принципы и методы математического описания процессов в управляемых системах с участием людей, чтобы можно было строить адекватные математические модели самой управляемой системы. В соответствии с этим они построили и исследовали с помощью системного анализа математическую модель экономической системы, основанной на частной собственности и рыночных отношениях совершенной конкуренции. Выбор именно этой экономической системы авторы объясняют тем, что «в ней описание влияния социальной структуры системы на экономические процессы сведено к описанию свободных рыночных отношений». А особенности рыночного хозяйства уже достаточно хорошо изучены экономической наукой.

Приведем конспективно схему построения этой математической модели.

Экономическая система описывается на трех уровнях. На первом уровне производятся описания производственных процессов (выпуск продуктов и использование природных ресурсов) и непроизводственных процессов (процессов потребления продуктов, формирования трудовых ресурсов, демографические процессы, социальная миграция, научно-технический прогресс).

На втором уровне содержится описание экономических механизмов регулирования процессов первого уровня.

Третий уровень содержит способы воздействия государства на экономические механизмы, отражая решения политических и государственных органов, выражающих интересы организованных социальных групп.

Проведя численные эксперименты с математической моделью рыночной экономики, авторы, в частности, выяснили, что причины кризиса рыночной экономики не в физическом исчерпании природных ресурсов, как считали Форрестер и Медоуз, а в «неспособности рыночных механизмов удовлетворительно регулировать развитие хозяйства».

4. Математическое моделирование исторических процессов

Ветвь истории, которая занимается применением количественных методов в исследовании исторических процессов и явлений, называется квантитативной историей (клиометрикой).

Отечественная квантитативная история развивается уже около 30 лет. Особенно большое количество работ было выполнено на историческом факультете МГУ имени Ломоносова в содружестве с учеными из МФТИ (лаборатория исторической информатики, возглавляемая доктором исторических наук Л.И. Бородкиным).

Отмечается, что за этот период выработалось устойчивое отношение к применению математического аппарата. Суть этого отношения состоит в том, что «математические методы исторического анализа имеют свои границы применения и должны сочетаться с другими, традиционными методами. Успех применения этих методов зависит от тех теоретических и методологических подходов, на основе которых ставится исследовательская задача, проводится отбор, обработка и анализ данных исторического источника» [13, с.15].

Остановимся на наиболее типичных применениях математического аппарата в исторических исследованиях.

Еще в середине шестидесятых годов появился ряд статей о методике исследования массового археологического материала, о датировке слоев по процентному соотношению типов керамики, об организации информационного поиска. Эти работы в целом характеризовались прямым переносом методов статистики и математики на исследование археологических памятников. Позже появляется новое направление – моделирование в археологии путем внедрения в археологические исследования математической логики и рассмотрения систем формализации материала. А также ведутся работы по классификации различных предметов, в основу которой положена статистическая обработка памятников искусства и погребальных комплексов.

Например, в работе В.М. Массона [14] рассматриваются основные ступени палеоэкономического моделирования: палеодемографические расчеты по площади жилищ, экономическому разделению труда – по локализации находок орудий, расчет экономического потенциала на основании определения потребностей общества; определение суммы трудовых затрат по всем отраслям экономики для обеспечения прожиточного минимума общества с целью выявления возможности существования расширенного производства.

Американские клиометристы к середине семидесятых годов считали уже обычным использование чисел и количеств в истории (сравнение, классификация), а также связанную с этим неизбежность упрощения в научном обобщении, поиске закономерностей развития (по статье Гарсковой [16]). В числе достоинств квантификации выделялись возможность обработки больших массивов информации, экономия времени анализа даже на уровне описания данных, точность и строгость определений и концепций, возможность проверки полученных результатов.

В книге Деллара и Джексона «Введение в статистику для историков. Количественный анализ и историческое исследование» (по [16]) излагались основные принципы научного исследования с применением количественных методов:

1) построение соответствующей теоретической базы и модели явления, основанной на этой базе;

2) формирование и проверка гипотез, относящих к ранней модели;

3) получение проверяемых результатов, которые могут быть повторены другими исследователями.

К количественным же методам авторы относили следующие:

1) Дескриптивная статистика (отвечающая на вопросы «как?», «когда?») – частотные распределения, графические изображения данных;

2) Измерения взаимосвязей между признаками (отвечающих на вопрос «почему?» – то есть рассматриваются вопросы о наличии связей, их формах, силе) – на основе регрессионного анализа и корреляционного анализа.

3) Множественный регрессионный анализ (с применением ЭВМ);

4) Многомерная классификация (здесь рассматривается методика обработки результатов голосования, где вводятся показатели «согласия» между голосующими, «сплоченности» групп. Составляются матрицы связи, формируются кластеры (группы) из людей, связь между которыми внутри кластера выше, чем их связь с остальными объектами других кластеров). Используя эту методику, авторы строят показатели «успеха» лиц, показатели «силы».

Некоторые исследователи используют бихевиористский подход к анализу исторических событий. Этот метод тесно связан с проблемами моделирования, так как это изучение регулярности, стандартов, стереотипов в поведении людей, и основано оно на законах логики. Отсюда широкое применение методов, в основе которых лежат формальная логика, математика, кибернетика. Моделирование, как проблема отношений познающего субъекта к объективной реальности и соотношения теории и эмпирических исследований, рассматривается бихевиористами в качестве универсального метода и сближает, по мнению некоторых авторов, все научные дисциплины. При этом особенностью исторических моделей является воспроизведение не объектов исследования, как в точных науках, а только некоторых сторон исследуемого процесса, позволяющих постепенно подходить к более целостному представлению о нем.

Методы новой экономической истории, возникшей на рубеже 50-60-х годов двадцатого века, заключались в обращении к ярко выраженному математическому моделированию, верификации, то есть проверке предлагаемых гипотетико-дедуктивных моделей с помощью фактических данных, отложившихся в исторических источниках, измерению явлений, иногда даже с помощью введения условных переменных, определению на этой основе отношения причины и следствия. Акцент был перенесен на ревизию многих положений традиционной экономической истории (рассматривались, например, вопросы о том, выгодно ли экономически рабовладение, какова роль металлургии в индустриализации, какова роль железных дорог в экономическом развитии государства). Все это на основе заимствования разработанных в экономике математических моделей вложения средств – выхода продукции, доходности, спроса и предложения, экономического роста. В готовые модели подставлялись конкретные исторические данные. Вопрос в том, насколько полны исторические источники, существовали ли систематические серии данных, насколько точна модель, насколько согласованы различные толкования сведений.

В рамках «новой экономической истории» появилось течение, которое к настоящему времени привлекает большое внимание клиометристов. Оно основано на применении контрфактических моделей, то есть гипотетической реализации в истории альтернативных вариантов развития. (Например, лауреат нобелевской премии «за развитие новых подходов в исследованиях по экономической истории, основанных на применении экономической теории и количественных методов» Р. Фогель рассматривал, в частности, вопрос, что было бы в экономике США, если бы главную роль в перевозках играли водные пути, а не железная дорога).

К настоящему моменту количество работ, посвященных построению каких-либо математических моделей исторических явлений, уже таково, что назрел вопрос о типологии получаемых моделей (на основе применяемых принципов и методов). Можно, например, ввести классификацию с точки зрения зависимостей между параметрами и состояниями моделируемого явления, тогда все модели разобьются на два класса ([15], [19]):

– *детерминистические* – при совместном рассмотрении соотношений состояния явлений в заданный момент времени однозначно определяются через параметры, входящую информацию и начальные условия. Примером может служить модель, состоящая из дифференциальных уравнений;

– *вероятностные* – при совместном рассмотрении соотношений состояния явлений в заданный момент времени однозначно определяются распределения вероятностей для состояний системы, если известны распределения вероятностей для начальных условий, параметров системы и входной информации. Заметим, что данная типология носит универсальный характер и применима не только к моделям исторических процессов.

Можно вводить типологию моделей по способу конструирования и дальнейшего использования модели. Данной проблемой занимались, в частности, акад. И.Д. Ковальченко [12] и Л.И. Бородкин, М.В. Таранин [15]. Приведем конспективно их результаты.

Модели исторических процессов можно отнести к двум типам: *отражательно-измерительным* и *имитационным*.

Модели первого типа отражают реальность такой, какой она была в действительности. Применение математики сводится к выявлению и анализу статистических взаимосвязей в системе показателей, характеризующих объект.

Модели второго типа можно распределить по двум группам: аналитические модели и имитационные модели (входящие в эти группы модели (и аналитические, и имитационные) можно распределить по целям, к которым стремится исследователь – имитационно-прогностические (ретропрогностические), имитационно-контрфактические и имитационно-альтернативные). Рассмотрим подробнее модели второго типа [15, с.32-33]:

– для аналитических моделей характерно, что процессы функционирования элементов рассматриваемой системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений. Эти соотношения могут исследоваться либо аналитически (результат получают в виде явных зависимостей), либо численно с помощью компьютера.

– для имитационных моделей характерно, что сам изучаемый процесс воспроизводится исходя из моделей элементарных явлений, составляющих рассматриваемый процесс, и из предположительных логических связей между ними.

В числе преимуществ имитационных моделей перед аналитическими отмечается возможность моделирования весьма сложных объектов (с большим числом переменных, с нелинейными зависимостями и т.д.). Основным недостатком является то, что полученное решение всегда носит частный характер, отвечая фиксированным значениям параметров начальных данных.

Наибольший интерес у исследователей вызывают имитационные модели, которые позволяют, сравнивая различные гипотетические варианты течения одного и того же процесса, более детально понимать реальный ход событий, уяснять связи между элементами явлений, выявлять закономерности процессов, делать обоснованные прогнозы. В качестве примера подобных исследований приведем модели этногенеза и социогенеза, созданные А.К. Гуцем [20, 21, 20, 21], а также работы, помещенные в сборнике [22].

Подводя итог всему выше сказанному, повторим, что математическое моделирование является одним из основных способов исследования процессов различной природы. И в настоящее время к этому методу познания действительности обращается все большее количество ученых, работающих в областях, традиционно далеких от математики.

Литература

1. Терешин Н.А. *Прикладная направленность школьного курса математики.* – М.: Просвещение, 1990.

2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. *Механика и прикладная математика.* – М.: Наука, 1983.

3. Фирсов В.В. *О прикладной ориентации курса математики* // Углубленное изучение алгебры и анализа – М.: Просвещение, 1977. С.215-239.

4. Рузавин Г.И. *Математизация научного знания.* – М., 1983.

5. Першиков В.И., Савинков В.М. *Толковый словарь по информатике.* – М. : Финансы и статистика, 1995.

6. Морозов К.Е. *Математическое моделирование в научном познании.* – М.: Мысль, 1969.

7. Гнеденко Б.В.*Введение в специальность математика.* – М.: Наука, 1991.

8. Гусев В.А. *Изучение величин на уроках математики и физики в школе.* – М.: Просвещение, 1981.

9. Гельфанд И.М.*Очерки о совместной работе математиков и врачей.* – М.: Наука, 1989.

10. Петров В.М., Яблонский Я.И. *Математика и социальные процессы (гиперболические распределения и их применения).* – М.: Знание, 1980.

11. Петров А.А., Краснощеков П.С. *Принципы построения моделей.* – М.: МГУ, 1983.

12. Ковальченко И.Д. *Методы исторического исследования.* – М., 1987.

13. Бородкин Л.И. *Математические модели в исторических исследованиях: Deus ex mashina?* // Математическое моделирование исторических процессов. – М.: Ассоц. «История и компьютер», 1996. С.6-30.

14. Массон В.М. *Метод палеоэкономического анализа в археологии* // Математические методы в социально - экономических и археологических исследованиях. – М.: Наука, 1981.

15. Бородкин Л.И., Таранин М.В. *О типологии математических моделей исторических процессов* // Математическое моделирование исторических процессов. – М.: Ассоц. «История и компьютер», 1996. С.30-57.

16. Гарскова И.М. *Количественные методы и ЭВМ для историка* // Математические методы в социально - экономических и археологических исследованиях. – М.: Наука, 1981.

17. Асланов Р.М. *Гуманитарный потенциал профессионально ориентированного курса дифференциальных уравнений в педвузе.* – М.: Прометей, 1996.

18. Гуц А.К. *Математическая модель этногенеза.* – Деп. в ВИНИТИ 20.07.94, N 1885-В94. 18 с.; То же: Фундаментальная и прикладная математика. – Омск, ОмГУ, 1994. С.90-106.

19. Гуц А.К. *Математическая модель социогенеза.* – Деп.в ВИНИТИ 21.10.96, N 3101-В96. 15 с.

20. Гуц А.К., Ланин Д.А., Никитин С.И. *Математическое моделирование этногенетических процессов.* – Деп. в ВИНИТИ 21.10.96, N 3100-В96. 17 с.

21. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология.* – Омск, ОмГУ, 1997. 212 с.

22. *Математическое моделирование исторических процессов.* – М.: Ассоц. «История и компьютер», 1996.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.98-102.

УДК 523.8

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ N ТЕЛ С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Р.Т. Файзуллин, Ф.Г. Хике

The consideration of the N - body gravitational problem equations can give us some class of boundary-valued problems defined on the "beam's" construction. One can consider it as finite element method's approximation with the linear function's basis. There are time and coordinate dependent beam's as distances between points and unknown coordinate functions which are defined on the beam's. The possible sample from this class is wave equation where our 'constellation' can be considered as stabilized with help of more wide volume. Simple iterative procedure give us well-known mathematical objects- configurations on the spherical planes where nodes and viewpoints are mass locations. May be it can give us similar visual configurations on the planes of spherical coordinates (galactic, equatorial, ecliptic). For some scales of mass distribution - light stars brighter than 1^m, brighter than 2^m, brighter than 6^m, light galaxies brighter than 8.4^m, and for automodel parameter as a visual brightness (M^3/R^2), there are configurations where geometry and arithmetics are tightly coupled (http://univ2.omsk.su/~rtf). There are isotropy and invariancy by time.

1. Постановка задачи

Моделирование динамики в задаче N тел является одной из наиболее трудоемких вычислительных задач, возникающих в физике. Попытки получения структур, аналогичных наблюдаемым в астрофизике, приводят к необходимости прямого численного интегрирования систем тысяч нелинейных дифференциальных уравнений. Представляется возможным снизить вычислительные затраты с помощью постановки задачи о локальной квазистабильности структур.

Рассмотрим систему гравитирующих частиц, которую можно подразделить на две разномассовые подсистемы – газ и частицы. Предполагается, что рассматриваемая система не коллапсирует, то есть это выделенный элемент среды,

E-mail: rtf@univ2.omsk.su

вращающийся вокруг некоторой точки, находящейся достаточно далеко, вне рассматриваемого объема (или внутри самого объема). Нас будет интересовать динамика частиц, вызванная только локальными взаимодействиями между членами группы, так как совместное интегрирование задач гидродинамики и N тел практически невозможно в силу трудностей, возникающих при учете термодинамики среды, учете псевдодавления, вызванного излучением и т.п. Но заметим, что существует обстоятельство, существенно упрощающее задачу, – присутствие «горячего газа», то есть частиц с малой массой и относительно большой скоростью. Они маскируют гравитационное воздействие далеких частиц с крупной массой на произвольную пробную частицу.

Следовательно, на каждую пробную частицу в любой момент времени действует сила, направленная в сторону мгновенного центра масс только ближайших соседей с большой массой. Отсюда следует, что коллапс, посредством которого образуются частицы большой массы, направлен на лагранжевы точки системы.

2. Моделирование

Рассмотрим включенные друг в друга шары K, K_1 с равномерно распределенными в них N материальными точками. Предположим, что гравитационное взаимодействие ограничено некоторым радиусом R, который существенно меньше радиусов шаров K, K_1. Тогда для каждой точки существует только несколько «соседей», гравитационные силы которых определяют положение частицы. Будем рассматривать внешний шар как стабилизирующий элемент для точек, расположенных во внутреннем шаре. Это означает, что точки, находящиеся во внешнем шаре, считаются неподвижными, движутся лишь точки, находящиеся во внутреннем шаре. Каким будет стационарное расположение точек, к которому придет распределение точек с различными массами (процедура эквивалентна взвешенному усреднению, стабилизированному внешним шаром)?

Рассмотрим случай, когда у каждой частицы в среднем имеется всего по три соседа, тогда равенство нулю силы, действующей на пробную частицу, эквивалентно компланарности трех векторов с началом в пробной частице и концами в трех остальных точках. Это означает, что в сферических координатах (центр координатной системы совпадает с лагранжевой точкой) координаты, отвечающие положениям соседей, будут лежать на одной прямой, вне зависимости от выбора плоскости, по которой делает полный оборот один из координатных углов. Оказывается, что при увеличении числа соседних частиц подобное свойство сохраняется.

Если обратиться к реальным распределениям масс, то выясняется, что подобные структуры существуют для нескольких масштабов – ближайшие звезды с массами, большими или равными массе Солнца (рис.1), ближайшие звезды типа O, B, F (рис.2) и ближайшие галактики [1]. На рис.3 приведена типичная конфигурация, полученная при численном моделировании. Представлено расположение соседних частиц в произвольной сферической системе координат для произвольной частицы, выбиравшейся среди 2000 частиц.

Как мы можем видеть, результаты численного моделирования и конфигурации для реальных структур исключительно похожи.

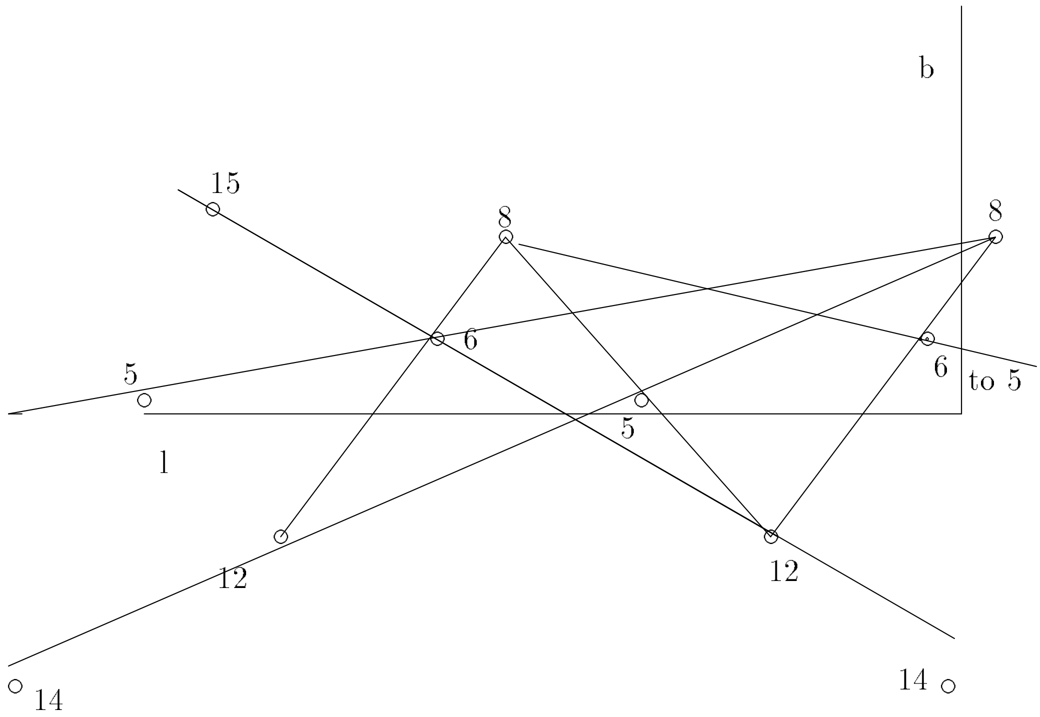

Рис. 1. (l,b) плоскость, центр сферы - Солнце, 4 αCen, 6 αAur, 8 αCmi, 12 αAql, 14 αTau, 15 αSco

3. Квазистабильность конфигураций

На первый взгляд представляется очевидным, что расположение частиц в лагранжевых точках будет неустойчивым и полученные конфигурации должны быстро распадаться вследствие теоремы о вириале. Но в модели присутствует влияние «горячего газа» или частиц с намного меньшей массой, которые и ответственны за ненулевую кинетическую энергию системы (для реальных систем).

Вязкость и упругое сопротивление газа проявляется в том, что падение частицы с малой массой на частицу с большой массой играет стабилизирующую роль, так как в силу конечности скорости распространения гравитационного взаимодействия вектор скорости падающей частицы направлен на прежнее положение частицы с большой массой.

Движение системы может проявляться и как стабилизирующее вращение. Этот случай может реализовываться в балджах спиральных галактик, кривые

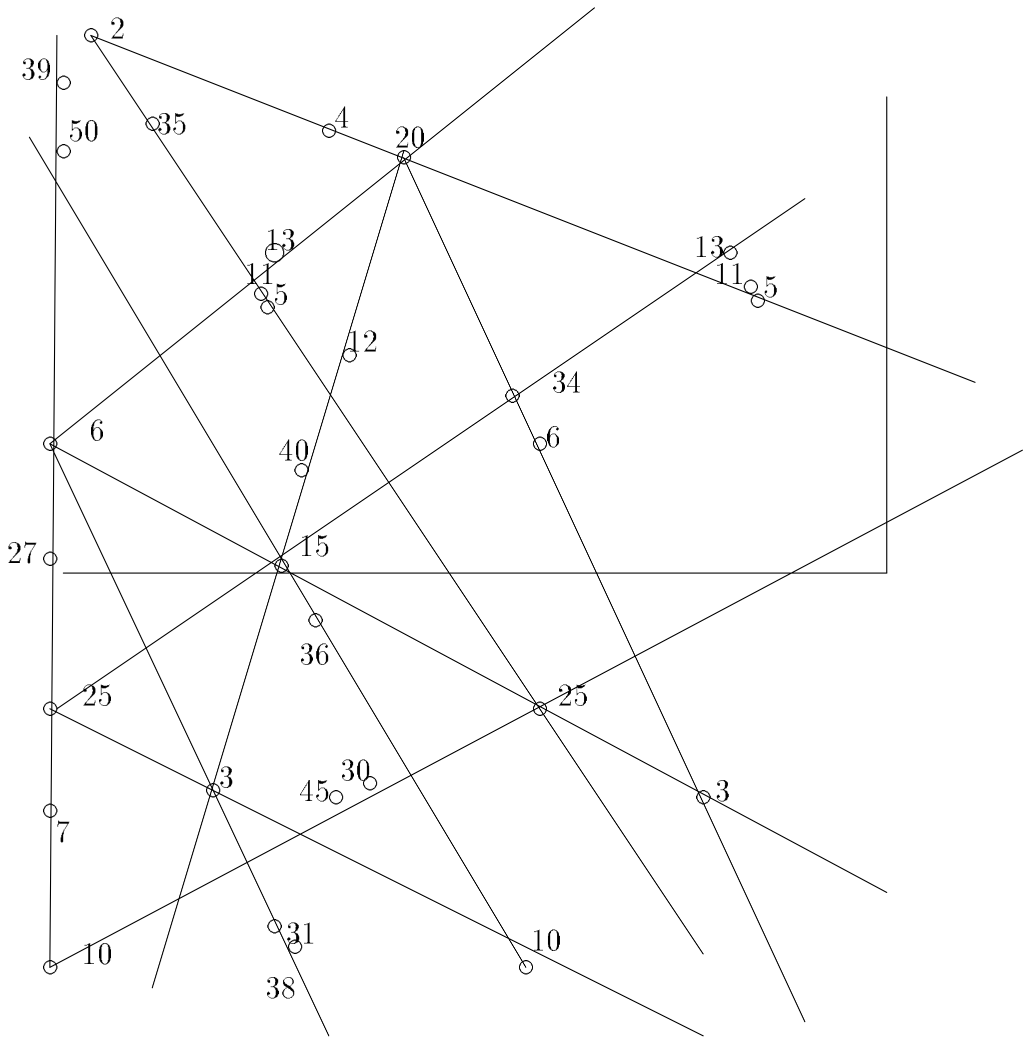

Рис. 2. (λ, β) плоскость

вращения совпадают здесь с кривой вращения твердого тела.

Численное моделирование показывает, что для подобных начальных конфигураций невозможно достаточно долго сохранять несколько плоскостей вращения, причем формирование плоскости вращения происходит всего лишь за несколько оборотов системы. Этим объясняется так называемый шейкер-эффект [2] или неустойчивость Римана [3] – синхронизация векторов вращения газообразного центрального тела и удаленного спутника.

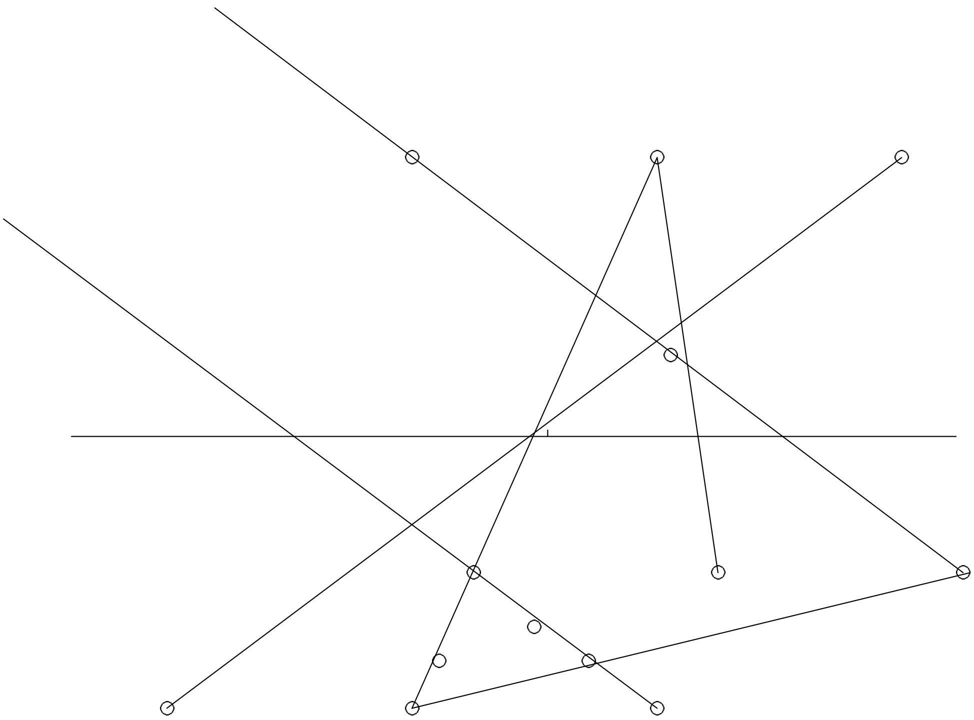

Рис. 3. «Почти» математически определенная конфигурация

Литература

1. Файзуллин Р.Т. *An Approximation of Genetic Algorithms and Star's Pattern* // 1-st On-Line WWW Workshop of Soft Computing, Nagoya, Japan, Aug 1996.

2. Heeke F.J. *Schwenkeffekte in der Himmelsmechanik* // IFAG 3/90 September, 1990.

3. Riemann B. *Ein Beitrag zu Untersuchungen U"ber die Bewegung eines flu"ssigen gleichartigen Ellipsoides.* – Abh. Der Ko"niglichen Gesseschaft der Wissenshaften zu Go"ttingen 9, 3-36 8 Dec. 1860.

Математические
структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.103-109.

УДК 530.51

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Р.Т. Файзуллин

Application of nonsymmetric eigenvalue's problem for interindustry analysis with variable coefficients of productivity.

1. Введение

Одной из основных линейных макроэкономических моделей является модель межотраслевого баланса (interindustry analysis) [1], [2]. Метод, разработанный американским экономистом В.В. Леонтьевым, родившимся в России, позволяет дать последовательный и численно определенный ответ на вопросы, связанные с межотраслевыми взаимодействиями. Математически дело сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений специального вида. Базовая стационарная модель описывается системой линейных алгебраических уравнений вида:

$$X = AX + F, \tag{1}$$

где вектор X показывает распределение выпуска каждого вида продукции, правая часть F представляет собой сумму промежуточного и конечного спроса, состоящих из инвестиций, закупок продукции, экспорта-импорта, матрица A определяет прямые затраты, или, как иначе говорят, – технологические коэффициенты. Одним из основных допущений в данной модели является предположение о неизменности матрицы A, что вполне оправдано в силу того, что технологические изменения или прямые затраты меняются несравненно медленней, чем выпуск различного рода изделий.

Но данное допущение может оказаться неприемлемым при появлении нового вида продукции или при переходной экономике. Кроме того, и малое изменение A может вызвать неадекватно большой отклик в выпуске продукции и в

E-mail: faizulin@univer.omsk.su

структуре, которая, казалось бы, должна быть устойчивой. В представленной работе сделана попытка описания нестационарного межотраслевого взаимодействия, базирующаяся на специальной системе линейных дифференциальных уравнений.

2. Динамическая модель

С точки зрения математики, достаточно естественно предположить, что если в некоторой прикладной области встречается задача решения систем линейных уравнений, то следует ожидать появления и второй основной задачи линейной алгебры – задачи на собственные значения и вектора.

В известных динамических моделях, описывающих сбалансированный рост, используется лишь первое собственное число A и представляется, что информация о структуре и скорости ее эволюции более полно будет описываться, если мы воспользуемся и последующими собственными числами.

Рассмотрим модель межотраслевого баланса в два последовательных момента времени t и $t + \delta t$. Будем считать, что нам известно поведение вектора F в рассматриваемый промежуток времени и изменение прямых затрат в зависимости от времени – $A = A(t)$. При достаточно малом δt можно приближенно записать:

$$A(t + \delta t) = A(t) + \delta t dA(t)/dt \qquad (2),$$

$$X(t + \delta t) = X(t) + \delta t dX(t)/dt \qquad (3).$$

Предполагая, что (1) выполняется в каждый момент времени, мы можем получить систему линейных дифференциальных уравнений в момент времени t:

$$(E - A)dX/dt = BX + dF/dt, \qquad (4)$$

где матрица $B = dA(t)/dt$ и вектора dF/dt, $X(0)$ считаются заданными. Отметим, что дальнейший анализ проводится в предположении малости рассматриваемого интервала времени, более того, мы будем рассматривать лишь постоянные матрицы A и B. Прямое интегрирование системы (4) по времени для $A(t)$ и $B(t)$ не имеет смысла, так как все величины завязаны нелинейным образом. Все, на что можно рассчитывать, – выявление тенденций и однозначность развития.

Если представить решение однородной системы в виде суперпозиции экспонент, то мы получим характеристическую систему

$$\lambda_i(E - A)V_i = BV_i, \qquad (5)$$

где вектор V_i – собственный вектор обобщенной задачи на собственные значения (4), а λ_i – соответствующее собственное число.

В механике эта задача хорошо известна [3], правда, при специальных положительных и положительно определенных матрицах. Матрице B в механике отвечает структурная матрица жесткости, получающаяся при аппроксимации оператора Лапласа или оператора теории упругости, матрице $E - A$ отвечает так называемая матрица масс или матрица Грамма системы базисных функций, через которые описывается механическая система. Матрица жесткости практически всегда положительно определенна. Условие положительной определенности индуцируется краевыми условиями Дирихле и Неймана. Говоря проще, если механическая система где-либо жестко закреплена, то она не может двигаться без напряжений как единое целое, то есть вектор, состоящий из констант, не является собственным вектором. Следовательно, и нуль не является собственным числом. Матрица масс положительно определена в силу того, что базисные функции не выражаются друг через друга. Известно, что в случае симметричных матриц обобщенная задача на собственные значения имеет решение тогда, когда хотя бы одна из матриц положительно определена.

Решение понимается в том смысле, что соответствующие квадратичные формы одновременно сводятся к диагональному виду и решение системы (4) может быть однозначно представлено как суперпозиция собственных векторов, умноженных на некоторые коэффициенты.

Для задачи (5) ситуация намного сложнее, мы даже не имеем симметричности рассматриваемых матриц.

Мы будем последовательно усложнять рассматриваемые примеры с целью получения качественных результатов. Рассмотрим в качестве B диагональную матрицу с отрицательными и малыми по модулю числами $-\epsilon_i$. Тем самым мы моделируем уменьшение прямых затрат производства, связанных с уменьшением потребности производства i с продуктом i. Положительные числа означали бы, что суммарно производство расширяется, хотя на единицу продукции, может быть, и приходится меньше затрат. Если к тому же числа на диагонали одинаковы, мы получим задачу(6):

$$(E - A)V_i = -\epsilon\beta_i V_i, \tag{6}$$

где β_i – число обратное к λ_i. Очевидно, что можно решить задачу при $\epsilon = 1$, а затем пересчитать собственные числа. Относительно левой части (5) можно утверждать, что $E - A$ не вырождена или, иначе говоря, матрица A *продуктивна* .

Естественно, что выпуск продукции будет падать в отсутствие положительной правой части. Скорость падения, как и в модели равновесного роста, будет определяться наибольшим собственным числом матрицы A. Равновесный рост будет сдерживаться падением прямых затрат. Усложним нашу модель введением новых связей в матрицу B. Пусть структура представляет собой кольцо, в котором технологические коэффициенты значимы лишь для ближайших соседей. То есть необходимыми компонентами для производства продукта i являются он сам и продукты $i + 1, i - 1$. Тогда при равномерном уменьшении потребности в данных товарах мы получим новый результат – неравномерность падения производства в зависимости от вектора, характеризующего выпуск продукции в начальный момент времени. Также в данной модели может наблюдаться и рост выпуска некоторой продукции, компенсируемый сильным падением производства другого, «соседнего» по связи, продукта. Тем самым в модели учитывается инерция выпуска, чего нет в общепринятом квазистационарном подходе. Ситуация предполагает структурную консолидацию, что влияет и на быстрые, по сравнению с изменением прямых затрат, инвестиции. Поэтому нельзя формально подходить к интегрированию (4) на продолжительном интервале времени.

Рассмотрим несимметричную матрицу B, отвечающую специальной линейной структуре. Производство представляет собой конвейер, где потребность i производства состоит лишь в продукции $i-1$. Если в модель внести малое отличие от строгого конвейера, то поведение X становится просто непредсказуемым, так как матрица B представляет собой пример Форсайта. Таким образом, появление новых связей или нового вида продукции может вызвать сильные колебания выпуска, на что могут реагировать опережающим образом инвесторы.

3. Метод решения задачи на собственные значения

Воспользуемся фактом из линейной алгебры, позволяющим сделать вывод о поведении решения, основанный на известном наборе собственных векторов. Если задача на собственные значения:

$$Rv = \lambda Gv, \tag{7}$$

где матрица G не вырождена, имеет в качестве решения n различных собственных чисел, то соответствующий набор собственных векторов образует базис. В этом случае начальный вектор X и вектор правой части однозначно раскладываются по данному базису, и можно проследить эволюцию решения на некотором интервале времени. В нашем случае в качестве G фигурирует матрица $(E-A)$, которая, очевидно, не вырождена. Совпадение собственных чисел означало бы, что в структуре производства, которая представляет собой взвешенный граф, имеется строгая симметрия, что в реальных задачах, по всей видимости, не встречается. Таким образом, задача сводится к выбору достаточно эффективного метода решения проблемы собственных значений для несимметрической матрицы. Как уже упоминалось ранее, одновременное приведение к диагональному виду, аналогично тому, как это делается в механике, – задача довольно затруднительная. Кроме того, совокупность методов одновременной диагонализации для симметричных матриц ориентирована на ленточные матрицы большой размерности, что не всегда существенно для данной задачи. Подобие ленточности можно достичь, соответствующим образом перенумеровав отрасли: чтобы близкие номера к i отвечали наиболее значимым для i компонентам производства, а это не всегда легко осуществить.

Мы будем рассматривать задачу вида:

$$\lambda_i V_i = (E-A)^{-1} B V_i, \tag{8}$$

где получающаяся в правой части матрица заполнена и несимметрична. В качестве метода решения выбран метод Якоби-Эберляйн, позволяющий в общем случае получить комплекснозначные собственные числа и вектора. Отметим, что устойчивость определения спектра можно проверять, варьируя A и B.

4. Пример применения

В качестве примеров были рассмотрены частично агрегированные балансы японской экономики за 1975 и 1980 годы [4]. Матрицы A, $(E-A)^{-1}$ приведены ниже. Основная проблема заключается в определении матрицы B. Сравнивая соответствующие коэффициенты в леонтьевских матрицах A, можно определить степень увеличения прямых затрат и скорость этого увеличения.

Матрица $(E-A)^{-1}$ 1975 год
1.157 .0486 .1538 .0668 .0453 .0132 .0290 .0289 .0231 .0529 .1117 .1012 .1109
.0303 1.0423 .1225 .0725 .164 .0114 .0314 .0252 .0197 .0286 .0893 .0814 .0869
.4647 .5542 1.9352.8037 .5443 .1475 .3467 .3436 .2571 .3886 1.399 1.269 .8646
.0087 .0133 .0127 1.011 .0345 .0250 .4215 .0175 .0167 .0150 .0162 .0153 .0217
.0143 .0404 .0419 .0285 1.0381.0127 .0158 .0275 .0191 .0319 .0335 .0345 .0624
.100 .1714 .1711 .1660 .1361 1.0880 .0788 .1075 .1443 .1075 .4159 .2205 .2906
.0133 .0212 .0201 .0211 .0193 .0535 1.009 .0251 .0166 .0205 .0292 .0287 .0390
.0381 .0693 .0632 .0637 .0492 .0368 .0280 1.142 .0590 .0385 .0929 .0712 .1153
0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1. 0. 0. 0. 0.
.0135 .0261 .0411 .0461 .0338 .0434 .0285 .0343 .0353 1.053 .0415 .0365 .0975
.002 .0036 .0052 .0036 .0042 .0036 .0016 .0042 .0042 .0034 1.004 .0047 .0096
.0054 .0043 .0145 .0061 .0042 .0022 .0027 .0033 .0023 .0031 .0108 1.009 .0070
.0197 .0455 .0498 .0479 .0435 .0202 .0207 .0346 .0563 .0390 .0413 .0352 1.031
Матрица A 1975 год
.1069 .0026 .0695 .0011 0.00 0.000 0.000 0.000 0.000 .0178 0.000 0.000 .0358
0.00 .0026 .0596 .0193 .1247 0.000 0.000 0.000 .0001 .0001 0.000 0.000 .0261
.2020 .2469 .4170 .3799 .2073 .0414 .0031 .1296 .0853 .1596 .6996 .6394 .3735
.0016 .0020 .001 .0002 .0239 .0017 .4162 .0049 .0082 .0045 0.000 0.000 .0013
.0026 .0245 .0169 .0075 .0197 .0065 .0033 .0154 .009 .0199 0.000 .0053 .0371
.0459 .1019 .0622 .0768 .0565 .0595 .0071 .0553 .0975 .0552 .2693 .0977 .1794
.0045 .0079 .0039 .0067 .0069 .0470 0.00 .0150 .0060 .0113 0.000 .0098 .0167
.0161 .0390 .0203 .0273 .0170 .0238 .0005 .1117 .0373 .0171 .0341 .0231 .0669
0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.
.0003 .0060 .0143 .0218 .014 .0335 .0083 .0177 .0198 .0379 0.000 .0044.0654
.0004 .0013 .0020 .0008 .002 .0027 0.000 .0025 .0027 .0017 0.000 .0009 .0061
.0016 0.000 .0072 0.000 0.000 .0010 0.000 .0006 .0002 0.00 0.000 0.000 .0001
.0055 .0271 .0206 .0235 .0233 .0130 0.00 .0205 .0456 .0253 0.000 0.000 0.000
Матрица $(E-A)^{-1}$ 1985 год
1.161 .2594 .0313 .0642 .0199 .0243 .0287
.2075 1.391 .1478 .3248 .0885 .1136 .0960

.2914 .4354 2.050 .5612 .9873 .5964 .1811
.0072 .0098 .0109 1.008 .0177 .0129 .0240
.1045 .1425 .1998 .1221 1.305 .3376 .0763
.0834 .1178 .1011 .1284 .0908 1.182 .0912
.1846 .3163 .3408 .3069 .2690 .3276 1.241
Матрица A 1985 год
.1078 .1645 .0004 .0012 .0005 0.000 .0078
.1156 .2311 .0433 .1980 .0035 .0034 .0439
.0683 .0980 .4529 .1935 .3869 .1435 .0326
.0018 .0011 .0012 .0003 .0086 .0026 .0183
.0346 .0370 .0647 .0192 .1630 .1953 .0236
.0376 .0440 .0283 .0612 .0248 .1125 .0541
.0666 .1246 .1173 .1231 .0655 .1431 .1494

Десятая строка в матрице за 1975 год отвечает услугам, то же относится к седьмой строке в матрице за 1985 год.

Из рассмотрения матриц очевидно, что развитие экономики определялось за эти годы развитием рынка услуг. Поэтому в первом приближении достаточно взять диагональную матрицу и добавить значимые внедиагональные члены, учитывающие изменение технологических коэффициентов, связанные непосредственно с услугами. Таким образом мы получим возмущение матрицы $(E - A)^{-1}$ и, соответственно, спектр матрицы, стоящей в правой части (8), качественно не изменится. Тогда рост решения также будет определяться максимальным собственным числом и соответствующим собственным вектором, вернее содержанием этого вектора в векторах начального распределения выпуска и инвестиций. Если же имеющиеся вектора содержат и последующий собственный вектор, то рост в какой-то мере определится и им. Ниже приведены собственные числа и векторы для определяющих поведение собственных чисел:

собственные числа для почти диагональной матрицы B
8.762568E-03 9.816713E-03 4.424383E-02 8.731473E-03
8.260831E-03 1.044244E-02 9.816700E-03 9.704132E-03
8.762575E-03 1.088722E-01 9.027042E-03 8.971319E-03
8.731471E-03
собственные вектора, отвечающие двум наибольшим собственным числам
собственный вектор 3
Real part 2.441167E-01 2.684828E-01 3.697668E-01 3.155234E-01
2.789752E-01 1.557924E-01 2.651417E-01 2.193006E-01
1.936987E-01 -1.358589E-01 4.829655E-01 4.246980E-01
3.559587E-01
Imag part 2.915189E-05 3.209864E-05 4.418018E-05 3.771357E-05
3.333680E-05 1.863299E-05 3.138664E-05 2.620518E-05
2.355388E-05 -1.623618E-05 5.766001E-05 5.061066E-05
4.267315E-05 собственный вектор 10
Real part

5.977751E-02 7.729032E-02 1.091967E-01 1.053702E-01
8.677633E-02 7.600030E-02 7.907974E-02 7.753917E-02
7.439750E-02 9.653247E-01 1.293427E-01 1.135298E-01
1.654960E-01
Imag part
5.547842E-07 7.146718E-07 1.009832E-06 9.761117E-07
7.913312E-07 6.932414E-07 7.270195E-07 7.029679E-07
6.675081E-07 8.885840E-06 1.204092E-06 1.074966E-06
1.505840E-06

Отметим, что в данном примере скорость изменения прямых затрат мала и, соответственно, вариации роста, обусловленные этими изменениями, также малы. Но если эти изменения произошли бы не за пять лет, а, скажем, за несколько месяцев, то выпуск продукции мог бы определиться именно такими изменениями.

Литература

1. Leontief W.W.*The Structure of American Economy.* – New York, 1949.

2. Leontief W.W.*Input-output Economics, London.* – New York, 1966.

3. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения.* – М.: Наука, 1968.

4. Кубонива М., Табата М., Табата С., Хасэбэ Ю. *Математическая экономика на персональном компьютере.* – М.: Финансы и статистика, 1991.

Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 1, с.110-122.

УДК 681.14

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

С.Ю. Полякова

The problems of mathematical educations in the aspect of mathematical modeling of social pricesses are considered.

1. Математическое моделирование

Одной из важнейших задач учителя математики является задача формирования научного мировоззрения учащихся. Н.А. Терешин считает, что существуют два пути формирования научного мировоззрения: через логическую организацию учебного предмета и через прикладную направленность курса. Рассмотрим вопросы, связанные с реализацией прикладной направленностью курса.

Теоретическое обоснование необходимости уделения пристального внимания к этой проблеме дано в работах Е.С. Вентциль, А.Н. Колмогорова, В.М. Монахова, Н.Я. Виленкина, А.Я. Блоха, А.Д. Мышкиса.

Так, например, А.Д. Мышкис пишет: «Для подавляющего большинства учащихся цель математического образования состоит в его практических возможностях, в необходимости применения методов математики и ее результатов в любой сфере деятельности, в ее развивающем значении. Поэтому необходимо показывать учащимся, как применяется математика к решению практических задач» [6, с.6].

Определение сущности прикладной направленности обучения школьной математике дает В.В. Фирсов: «осуществление целенаправленной содержательной и методологической связи школьного курса математики с практикой» [14, с.232].

А.Д. Мышкис и М.М. Шамсутдинов конкретизируют термин прикладной направленности так: «Под прикладной направленностью обучения математике мы понимаем формирование у учащихся знаний, умений и навыков, необходимых для применения математики в других учебных дисциплинах, в трудовом процессе, в быту и тому подобное, а в идеале - и в развитии стремления к таким применениям» [15, с.12]. А.О. Будринсчитает, что «... связь обучения с жизнью, прикладная направленность школьной математики может и должна являться не только целью, но и средством, способом обучения математике», предлагает раскрывать приложения математики «в двух направлениях: применение математического аппарата при анализе практических и производственных ситуаций и применение математики как исследовательского инструмента в других науках, в том числе и в самой математике, когда методы и результаты одной теории используются в другой математической теории». Данный принцип требует изменения стиля изложения материала. Математику следует сделать «активной, учить ее не как нечто застывшее, а как нечто конструируемое, создаваемое самими учениками» [16, с. 21, 22, 23].

Н.А. Терешин выделил две взаимосвязанные функции прикладной направленности школьного курса математики: 1) мировоззренческая, которая реализуется, когда «устанавливают связь математики с другими предметами, знакомят с элементами моделирования (внешнего), алгоритмами, рассматривают историю возникновения и эволюцию математических понятий и т.д» [8, с.3]; 2) социально-педагогическая, которая реализуется, «когда проводится профессиональная ориентация школьников средствами самого этого курса, экономическое и экологическое воспитание учащихся, обучение их элементам программирования на ЭВМ, работе с микрокалькулятором, то есть, когда школа выполняет социальный заказ общества на раннем этапе развития».

В реализации прикладной направленности ведущая роль отводится решению прикладных задач. Не вдаваясь в подробное освещение различных трактовок этого термина, будем придерживаться приведенного Н.А. Терешеным [8, с.7] определения прикладной задачи как задачи, поставленной вне математики и решаемой математическими средствами.

А.Р. Мышкис, М.М. Шамсутдинов отмечают, что «неформальное обсуждение условия исходной задачи, уяснение смысла участвующих в ней величин, ...выбор и мотивировка гипотез, обсуждение выводов из ее изучения ... вызывают наибольшие затруднения, а именно владение ими ... определяет умение применять математику за ее пределами» [15, с.12].

Существуют различные классификации прикладных задач: по принадлежности фабулы к специфическим предметным областям (экономические, сельскохозяйственные, машиностроительные и другие); по типам возникающих при их решении математических моделей (на функцию, уравнение и так далее); по форме использования на уроках (подготовительные, задачи на применение отдельной теоремы, формулы; комбинированные). Исследователи Н.Р. Колмакова и Р.А. Майер [17, с.44-46] разработали систему ранжирования прикладных задач по условию и требованиям, предъявляемым в ходе решения, к учащимся.

Т.А. Ширшова [18] не рассматривает в исследовании прикладную задачу явно, но приводит классификацию математических моделей, возникающих в исследованиях гуманитарных ситуаций. Эта классификация строится на анализе содержания фабулы задачи и математическом содержании соответствующей математической модели. Приведем конспективно ее здесь.

Первый тип задач – внематематическое содержание доступно учащимся; математическая модель изучается в основном курсе математики.

Второй тип задач – внематематическое содержание не требует длительного по времени изложения и доступно и поучительно для старшеклассников; математическая модель не изучается в основном курсе математики, но существует методика, позволяющая сделать ее доступной.

Третий тип задач – внематематическое содержание требует достаточно длительного по времени изложения; математическая модель доступна (такие задачи исключаются из учебных курсов).

Четвертый тип задач – математическая модель опирается на вузовские разделы математики, не позволяющие адаптировать ее для преподавания старшеклассникам.

Таким образом, в школьный курс математики необходимо включать прикладные задачи только первых двух типов.

Рядом исследователей отмечается, что любая прикладная задача ценна тогда и только тогда, когда выявлены и реализованы ее учебные (воспитательные, дидактические, познавательные) функции.

Р.М. Асланов отмечает: «Использование прикладных математических задач помогает формировать научное мировоззрение обучаемых:

– наблюдениями (непосредственно или опосредованно) предметов и явлений реального мира, а также получением сведений о происхождении математики на основе показа математических закономерностей;

– показом роли и места математики в системе других наук;

– показом взаимосвязи и взаимообусловленности с научно-техническим прогрессом;

– использованием научно-познавательных методов (анализа, синтеза, индукции, дедукции и других) для познания реальной действительности;

– показом диалектики в развитии математики (внутренние противоречия как основная движущая сила любого развития, от вчерашней неразрешимой проблемы – к сегодняшней разрешенной; от специфичного и отдельного метода к общему и созданию теории и наоборот);

– показом возможностей математики в формировании человеческого мышления и личности; и др» [10, с.20].

Н.А. Терешин [8] понимает прикладную направленность школьного курса математики как методическую систему, составляющими компонентами которой являются элементы (внешнего) моделирования (решение прикладных задач), межпредметные связи, экономическое и экологическое воспитание учащихся.

В связи с этим рассмотрим вопросы, связанные с обучением школьников элементам математического моделирования.

Одним из дидактических принципов обучения является принцип научности. В [1, с.26] указаны взаимосвязанные условия реализации этого принципа на практике:

1) соответствие содержания образования уровню современной науки;

2) создание у учащихся верных представлений об общих методах научного познания;

3) показ важнейших закономерностей процесса познания.

Для нас важно то, что второе условие «естественным образом выдвигает на первый план обучение школьников доступным для них способам математического моделирования» [2, с.26], так как метод математического моделирования является одним из самых эффективных методов научного познания действительности с помощью математики.

Анализ методической литературы о математическом моделировании в образовании, написанной за последние 20 лет, показывает, что в начале этого периода дидактам и методистам свойственно скорее декларировать необходимость ознакомления школьников с методом математического моделирования [3, с.240]. Так, Ю.М. Колягин [4, с.167], говоря о том, что в школьном курсе математики должны быть представлены упражнения по формированию математических навыков, приводит краткий перечень целей обучения через задачи:

1) заинтересовать или мотивировать;

2) приводить к открытию процессов или пониманию соотношений;

3) развивать и практиковать «технику решения задач»;

4) формировать понятие математической модели.

Но, каким образом достичь эти цели, автор не указывает.

А.Я. Блох, И.А. Павленкова впредполагают, что «в силу своей сложности «понятие математической модели» по-видимому, не может являться предметом изучения в школе. Но крайне важно, чтобы оно было проиллюстрировано на развернутом примере» [2, с.310] .

А.А. Пинский в связи с рассмотрением роли математической модели на уроках физики и математики пишет: «... обучение математическому моделированию должно осуществляется не только (и даже не столько!) на уроках математики, но и в процессе обучения всем естественнонаучным дисциплинам, преподающимся в средне-общеобразовательных школах» [5, с.118].

На современном этапе вопросы, связанные с различными аспектами методики обучения математическому моделированию, рассмотрены рядом исследователей: Н.А. Терешиным, И.М. Шапиро, А.Г. Мордковичем, В.М. Монаховым и другими.

В методике сложилось достаточно устойчивое определение термина «математическая модель реального процесса» – это приближенное описание этого процесса на языке математики. Математическое моделирование – построение модели и последующее ее исследование.

Самое общее описание процесса математического моделирования заключается в перечислении 3-х этапов:

1. Формализация условия.

2. Внутримодельное решение.

3. Интерпретация результата.

В научно-методической литературе существуют и более подробные описания структуры этого процесса.

Например, в [6, с.6] приводится следующая схема:

1. Математическая формулировка задачи, опирающаяся на неформальное обсуждение ее постановки.

2. Выбор метода исследования сформулированной математической задачи.

3. Проведение математического исследования.

4. Анализ и реальная интерпретация полученного математического результата.

Ряд авторов (А.Д. Мышкис, М.М. Шамсутдинов [15], Н.Р. Колмакова, Р.А. Майер [17]) тоже выделяет четыре этапа, но при этом первые два пункта выглядят так:

1. Предварительное рассмотрение объекта.

2. Создание (выбор) математической модели.

Гораздо более развернутые схемы приведены у Г.В. Малковой, В.М. Монахова [7, с.47]:

1. Изучение объекта.

2. Описание объекта.

3. Математическое моделирование (составление математической модели).

4. Выбор (или разборка) метода исследования математической модели.

5. Выбор или составление программы решения задачи на ЭВМ.

6. Решение задачи на ЭВМ.

7. Анализ полученного решения.

Такое расхождение в описании процесса математического моделирования, по-видимому, происходит из-за того, что авторы уже в схеме хотели выделить и зафиксировать некоторые группы действий, результатом овладения которых являются соответствующие умения школьников.

Так, В.А. Стукалов, М.В. ‘Крутихина, Н.А. Терешин выявляют следующие элементы этапов формализации и интерпретации:

– замена исходных терминов выбранным математическим эквивалентом;

– оценка полноты исходной информации и введение при необходимости недостающих числовых данных;

– выбор точности числовых значений, соответствующей смыслу задачи;

– выявление возможности получения данных для решения задачи на практике.

Г.М. Морозов [8, с.7] выделяет три основных элемента этапа формализации и на их основе формулирует основные умения, которые необходимы при построении математической модели:

1) выделение системы основных характеристик задачи;

2) нахождение системы существенных связей между характеристиками;

3) нахождение системы необходимых ограничений, накладываемых на характеристики

И.М. Шапиро [9, с.38] выделяет следующие умения:

1) на этапе формализации: умение выделять существенные факторы, определяющие исследуемые явления (процесс), умение указать те факторы, которые вызывают погрешность при составлении модели, умение выбрать математический аппарат для составления модели.

2) на этапе внутримодельного решения: умение планировать ход решения; умение дать качественную оценку количественных результатов, выявить и оценить источники погрешности.

3) на этапе интерпретации решения: умение грамотно перевести результат решения на язык исходной задачи, умение проверять решение; умение распространять найденные решение на решение других практических задач, оценить итоговую степень точности получения результатов и выяснить ее влияние на корректность решения.

Р.М. Асланов приводит приблизительно тот же список умений, включая в их число и «специфические элементы математической культуры», например, на первом этапе знания о способах получения информации; на втором – соотнесение уровня погрешности вычислений с уровнем погрешности математической модели [10, с.35-37].

Все авторы подчеркивают, что только настойчивая работа по формированию этих навыков у учащихся, то есть работа по усилению внимания (конкретизация) ко всем трем этапам математического моделирования, может обеспечить верное представление о процессе математического моделирования у школьников.

Понятие модели тесно связано с наглядностью, так как становится легко обозримой структура связей рассматриваемого явления, доступной для формального исследования [1, с.29]. Именно это дает основание некоторым исследователям (В.В. Давыдов; Л.М. Фридман) полагать, что для школьного курса математики особую роль должен играть не принцип наглядности, а принцип моделирования, который является «высшей ступенью принципа наглядности», «его развитием и обобщением, связанным с принципиальными изменениями в целях обучения и типах учебного процесса» [11, с.51]. Л.М. Фридман определяет реализацию этого принципа в обучении математике следующим образом: «во-первых, изучение самого содержания школьного курса математики с модельной точки зрения, во-вторых, формирование у учащихся умений и навыков математического моделирования различных явлений и ситуаций, наконец, в-третьих, широкое использование моделей как внешних опор для внутренней мыслительной деятельности, для развития научно-теоретического стиля мышления» [11, с.58].

В соответствии с этими требованиями А.Г. Мордкович [12] выдвинул новую концепцию школьного курса алгебры, идейным стержнем которой являются понятия «математический язык», «математическая модель», при этом «математика предстает перед учащимися не как набор разрозненных фактов, который учитель излагает только потому, что они есть в программе, а как цельная, развивающаяся и в то же время развивающая дисциплина общекультурного характера» [12, с.28]. «Методология новой концепции заключается в следующем: каждый год обучения ориентирован на конкретную модель реальной действительности». Понятие математического моделирования предусмотрено ввести в самом начале 7 класса, в дальнейшем раскрывая тезис «математика изучает математические модели» с помощью изучения четырех основных типов моделей: равномерных, равноускоренных, периодических процессов и процессов органического роста.

Как видим, современная методика преподавания математики прошла путь от высказываний в пользу полезности формирования представлений о математическом моделировании у школьников до конкретных разработок школьного курса алгебры, основанного на использовании идей математического моделирования.

Н.А. Терешин [8, с.19] выделил основные дидактические функции математического моделирования:

1) познавательная – реализуется в ознакомлении учащихся с наиболее кратчайшим и доступным способом осмысления изучаемого материала;

2) управления деятельностью учащихся;

3) интерпретационная;

4) эстетические.

С проблемой обучения методу математического моделирования школьников тесно связана проблема реализации межпредметных связей математики, которые вытекают из самого существа моделирования; «Решение прикладных задач – высший уровень использования межредметных связей в практике преподавания математики» [19, с.7].

Известно, что реализация межпередметных связей способствует осуществлению всех функций обучения: образовательной, развивающей и воспитывающей.

В.А. Далингер замечает: «Для того, чтобы межпредметные связи стали достоянием ученика, следует включить их в его учебно-познавательную деятельность в качестве ее необходимых условий и компонентов... Реализация межпредметных связей в обучающей деятельности учителя заключается прежде всего в отборе материала, который представляет эти связи, в выборе организационных форм, методов и приемов обучения, направленных на наиболее успешное усвоение этого материала» [20, с.11].

На пути реализации в школе межпредметных связей математики с другими науками существует много трудностей, причины которых Г. Терлиньски [21] видит в «пренебрежении к использованию имеющихся у учащихся математических знаний учителями других дисциплин; почти полное отсутствие ориентировки в программе по математике у учителей других предметов, и наоборот, непонимание большинством учителей сущности процесса применения математики за ее пределами».

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что привлечение элементов математического моделирования в школьную практику стало актуальным, особенно сейчас, когда многие методисты всерьез задумываются над проблемой гуманитаризации школьного образования. Мы считаем, что, показывая школьникам те аспекты математики, которые используются для решения прикладных задач (причем возникших не только в области естественных наук, а и при исследованиях в гуманитарных областях), мы тем самым способствуем гуманитаризации общего образования, расширяем мировоззрение школьников.

Закономерен вопрос: насколько возможно вводить элементы математического моделирования в процесс обучения, ведь у школьников даже десятыходиннадцатых классов нет достаточной математической подготовки (значительная часть необходимого для моделирования математического аппарата – дифференциальные уравнения, теория вероятностей и т.д. – либо вообще не изучается (в базовом школьном курсе математики), либо (в углубленном курсе математики) дается не в полном объеме)? Мы думаем, что эти трудности преодолимы с помощью содержательного проникновения в предмет, овладения эмпирическими правилами, а также численных методов, реализуемых на компьютерах, что заметно снижает барьер необходимой математической подготовки учащихся.

В серьезных научных исследованиях на современном этапе обязательным становится применение компьютеров при решении реальных задач средствами математики . Это происходит из-за необходимости учета в разумные сроки большого числа переменных и зависимостей между ними. «Особое значение имеет возможность варьировать и уточнять исходные описания, облегчающие выявление существенных свойств исследуемого процесса» [23, с.81]. Поэтому компьютеры и компьютерные методы обучения вычислениям можно «рассматривать как новые эффективные средства реализации трудных операций математической операционной системы» [22, с.84].

Как указывают Н.Н. Моисеев и А.А. Петров, «построение больших математических моделей открывает возможность превращения ЭВМ в экспериментальную установку...», в связи с этим термин «имитационная машина» означает объединение системы «... исходных моделей, имитирующих изучаемую реальность, и всего необходимого сервиса, позволяющего многократно использовать модели для проведения серии математических экспериментов» [24, с.3]. Обычно при имитационном эксперименте физических процессов известна большая часть уравнений и параметров, задающих процесс. Необходимо, «...используя данные физических и вычислительных экспериментов, уточнять некоторые описания, а в известных описаниях уточнить параметры». В области социальных приложений математики дело обстоит гораздо сложнее. «Обычно неизвестны еще даже основные уравнения, описывающие общественные процессы. Нельзя поставить чистый целеноправленный социально-экономический эксперимент. Математическое имитационное экспериментирование с моделями на ЭВМ остается единственным средством проверки фундаментальных (или, иначе, исходных, элементарных) гипотез относительно структуры общественных отношений и взаимодействий общественных процессов. Опыт показывает, что такие гипотезы можно формулировать как некоторые вариационные принципы. Сравнительно редко удается из исходного вариационного принципа аналитически вывести следствие качественного характера о свойствах изучаемых отношений или взаимодействий. Возникает задача – научиться выводить качественные следствия из имитационных экспериментов на ЭВМ» [24, с.4-6].

Наряду с этими «внутренними» проблемами приложения ЭВМ существует более общая проблема – проблема не очень эффективного использования вычислительной техники в разных ситуациях. «Одна из причин этого – непонимание пользователями объективных закономерностей, относящихся к включению в ту или иную область деятельности какого-либо нового фактора, позволяющего резко усилить физические или интеллектуальные возможности исполнителей.... Пытаясь сделать с помощью ЭВМ то же самое, что делалось без них, к тому же практически теми же старыми методами, мы, образно говоря, использовали ЭВМ как микроскоп для забивания гвоздей» [25, с.10].

Для того, чтобы избежать повторения этой ситуации, необходимо формировать у подрастающего поколения привычку обращаться к компьютеру всякий раз, когда это может оказаться полезным для решения стоящих перед ними задач.

«Для этого необходимо, чтобы учащиеся не только освоили азы формальных операций с компьютерами, не смотрели на него, как на забавную игрушку, но и (прежде всего!) поняли те особенности, которые связаны как с новыми возможностями, открывающимися при применении ЭВМ, так и с новыми требованиями к специалистам, прямо или косвенно эту технику использующими» [25, с.10].

Огромное разнообразие ролей компьютера в учебном процессе в своей основе является сочетанием трех главных функций компьютера в учебном процессе: компьютер как орудие, компьютер как партнер, компьютер как источник формирования обстановки.

Реализовать эти функции в полном объеме в школе призван курс информатики и вычислительной техники. В настоящее время происходит обсуждение и утверждение тем, включаемых в образовательные стандарты. Для нас важно то, что практически все авторы программ обучения в обязательном порядке уделяют время для рассмотрения роли компьютера в процессе моделирования реальных процессов. В разном объеме затрагивается эта тематика, но ключевым для нее становится термин «информационная модель». Под «информационной моделью» чаще всего понимается такая модель, в которой не воспроизводятся сами свойства и характеристики объектов моделирования, а дается их описание на каком-либо языке.

Итак, в числе основных требований к уровню подготовки учащихся относят:

– учащиеся должны иметь представление о сущности формализации и методе моделирования;

– уметь построить простейшие модели и исследовать их с использованием компьютера.

При этом выделяют два направления:

1. Использование компьютерных моделей (точнее, учебных компьютерных моделей) как средства наглядности.

2. Работа с учебными компьютерными моделями как с объектами исследований.

Примеры реализации этих подходов можно найти в [25, 30] и других.

При анализе существующей методической литературы замечено, что мало разработанной остается тема, знакомящая школьников с современным использованием математического моделирования в исторических исследованиях. Изучая это обстоятельство, мы пришли к выводу, что можно, например, привлекая самые основные понятия из курса «Начала математического анализа», показать старшим школьникам, что к истории – науке о событиях в их связи и последовательности, можно подойти и с точки зрения естественных наук. Для этого необходимо знакомство с основными идеями теории этногенеза известного историка Л.Н. Гумилева.

Отметим, что именно эта теория, описывающая всю историю человечества как совокупность различных этногенезов (процессов возникновения, развития, гибели этносов), очень удобна для показа возможностей метода математического моделирования. Это происходит из-за того, что введенный Л.Н. Гумилевым термин «пассионарность», понимаемый как «мера потенциальных возможностей конкурирующих этнических систем», позволяет множество исторических фактов свести к небольшому числу поддающихся оценке переменных. А это очень удобно для построения математической модели этногенеза.

Для школьников рассказ о роли математического моделирования в некоторых исторических исследованиях можно реализовать в виде блока занятий, посвященных одной идее – построению и изучению обобщенной математической модели этногенеза.

Приведем план этих занятий.

1. Введение в теорию Л.Н. Гумилева. Ознакомление с основными понятиями: этнос, этногенез, пассионарность, пассионарии, субпассионарии, гармоничные люди, фазы этногенеза, схема этногенеза.

Особое внимание уделяется пассионарности – энергетической характеристике, с помощью которой можно не только качественно, но и количественно описать ход этногенеза.

2. Рассказ о математических моделях различных простых физических и биологических процессов. Разбор каждого этапа математического моделирования.

3. Составление на качественном уровне, на основе полученных знаний системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которые описывают состояние пассионарной напряженности каждого из элементов этноса (см. [26, 27, 28, 29]).

4. Работа в компьютерном классе с пакетом специально созданных программ, решающих данную систему и графически представляющих полученные результаты.

У школьников появляется возможность, изменяя коэффициенты в уравнениях, прямо манипулировать созданным ими этносом. А это позволяет развивать у учащихся опыт наблюдателя, интуицию, способность к предсказанию. Интерпретируя полученные результаты, школьник использует и «здравый смысл», и запас знаний по истории. При этом им глубже осмысливается реальное значение коэффициентов в дифференциальных уравнениях.

Занятия такого рода проводились автором в ФМШ – лицее 64, с учениками гимназии 75, со школьниками 32 школы, со студентами исторического и математического факультетов ОмГУ. Был отмечен огромный интерес со стороны слушателей к данным занятиям, в частности, и к теме этих занятий в целом. Возможность проведения численного эксперимента с математической моделью позволяет расширить и сделать более глубокими знания и по математике, и по истории, усилить прикладную и практическую направленность обучения. Привлекательной стороной подобного моделирования является и возможность приобщения учащихся к компьютерной технике, и выработка навыков ее систематического использования, чего трудно достичь на одних лишь занятиях базового курса информатики. Считаем, что подобные занятия имеют большое мировоззренческое значение.

Литература

1. Столяр А.А. *Педагогика математики.* – Минск: Высшая школа, 1986.

2. *Методика преподавания математики. Общая методика* / Сост.: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985

3. Варданян С.С. *Решение прикладных задач на уроках геометрии* // Современные проблемы методики преподавания математики. – М.: Просвещение, 1985.

4. Колягин Ю.Н. *Методика преподавания математики в средней школе.* – М.: Просвещение, 1975.

5. Пинский А.А. *Математические модели в системе межпредметных связей.* // Межпредметные связи естественно-математических дисциплин. – М.: Просвещение, 1980.

6. Блох А.Я., Виленкин Н.Я., Мышкис А.Д., Роговская Е.Б. *Проблемы прикладной направленности школьного курса математики* // Проблемы преподавания математики в школе. – М.: Просвещение, 1984.

7. Малкова Т.В., Монахов В.М. *Математическое моделирование - необходимый компонент современной подготовки школьника* // Математика в школе. – 1984. – N3. – С.46-49.

8. Терешин Н.А. *Прикладная направленность школьного курса математики.* – М.: Просвещение, – 1990.

9. Шапиро И.М. *Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики.* – М.: Просвещение, 1990.

10. Асланов Р.М. *Гуманитарный потенциал курса дифференциальных уравнений.* – М.: Прометей, – 1996.

11. Фридман Л.М. *Психолого-педагогические основы обучения математики в школе.* – М.: Просвещение, 1983.

12. Мордкович А.Г. *Новая концепция школьного курса алгебры* // Математика в школе. – 1996. – N6.– С.28-33.

13. Крутихина М.В.*Обучение элементам моделирования при решении сюжетных задач в курсе алгебры восьмилетней школы как путь реализации прикладной направленности школьного курса математики:* Автореф. ... канд. пед. наук. – Л., 1986.

14. Фирсов В.В. *О прикладной ориентации курса математики* // Углубленное изучение алгебры и анализа. – М.: Просвещение, 1977. С.215-239.

15. Мышкис А.Д., Шамсутдинов М.М. *К методике прикладной направленности обучения математики* // Математика в школе. – 1988. – N2.– С.12-14.

16. Будрин А.О. *Принцип прикладной направленности школьной математики* // Математические методы решения прикладных задач в практике преподавания. – Пермь, 1991.

17. Колмакова Н.Р., Майер Р.А. *Задачи прикладной направленности в практике работы учителей математики школ красноярского края* // Математические методы решения прикладных задач в практике преподавания. – Пермь, 1991.

18. Ширишова Т.А. *Математическое образование старшеклассников с гуманитарными склонностями как методическая проблема:* Дисс. ... канд. пед.наук. – Омск, ОГПИ, 1994.

19. Фоминых Ю.А. *Мировоззренческая роль прикладной направленности в преподавании математики* // Математические методы решения прикладных задач в практике преподавания. – Пермь, 1991.

20. Далингер В.А. *Межпредметные связи математики физики.* – Омск, 1991.

21. Терлиньски Г. *Теоретические основы прикладной ориентации обучения математики и их реализации в школах ПНР:* Дисс. ... доктор. пед.наук. – М., 1989.

22. Неймарк Ю.И. *Математика как операционная система и модели* // Соросовский образовательный журнал. 1996. N1. С.82 -85.

23. Александров В.В., Арсентьев В.Н. *Что может ЭВМ?* – Л.: Машиностроение, 1986.

24. Самарский А.А., Моисеев Н.Н., Петров А.А. *Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах.* – М.: Наука, 1986.

25. Матюшкин-Герке А. *Учебно-прикладные задачи в курсе информатики* // ИНФО. 1992. N3-4, N5-6. С.3-11, 15-18.

26. Гуц А.К. *Математическая модель этногенеза.* – Деп.в ВИНИТИ 20.07.94, N 1885-В94. 18 с.; То же: Фундаментальная и прикладная математика. – Омск: ОмГУ, 1994. С.90-106.

27. Гуц А.К. *Математическая модель социогенеза.* – Деп.в ВИНИТИ 21.10.96. N 3101-В96. 15 с.

28. Гуц А.К., Ланин Д.А., Никитин С.В. *Математическое моделирование этногенетических процессов.* – Деп. в ВИНИТИ 21.10.96, N 3100-В96. 17 с.

29. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология.* – Омск: ОмГУ, 1997. 212 с.

30. Просвиркин В.Н., Новиков А.И., Данюшевская Т.И. *Экспериментальная программа по дизайн-технологии* // ИНФО. 1997. N1. С.31-38.